Лекция № 4

Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем случае имеет вид:

$$F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$$ - уравнение разрешенное относительно производной.

Решение ДУ имеет вид $\Phi(x, y, C_1, C_2...C_n) = 0$ и зависит от произвольных постоянных:

Определение 1. Задачей Коши для ДУ называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовлетворяющего n начальным условиям, где n - порядок ДУ.
Определение 2. Начальные условия – это условия на функцию y и ее производные до $n-1$ порядка включительно, заданные в одной и той же точке x_0, называемой начальной.

Поставить задачу Коши для ДУ это значит задать начальные условия.

Пример. Записать ДУ 4-го порядка в общем виде. Поставить задачу Коши.

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$
$$y(x_0) = a$$
$$y'(x_0) = b$$
$$y''(x_0) = c$$
$$y'''(x_0) = d$$

Теорема существования и единственности решения ДУ высших порядков

Дано: $y^{(n)} = f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$

Если в некоторой открытой области D функция $f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$ и ее частные производные первого порядка по всем аргументам, начиная с y: $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''} ... \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ определены и непрерывны и точка с координатами $P_0 = (x_0, a, b, c, ..., s)$, лежит внутри области, то при начальных условиях:

$$y(x_0) = a$$
$$y'(x_0) = b$$
$$y''(x_0) = c$$
$$.......$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = s$$
$$.......$$

ДУ имеет, в достаточно малом интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$, единственное решение , удовлетворяющее этим условиям.

Теорема утверждает два положения:

1. Решение существует на интервале, если функция $f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$ непрерывна.
2. Решение единственное в области D, если имеются непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''} ... \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$

Интегрирование ДУ высших порядков

Нахождение общего решения ДУ высшего порядка возможно только в нескольких случаях.

Случай 1. ДУ имеет вид: $y^{(n)} = f(x)$.
В этом случае решение находится в результате n кратного интегрирования левой и правой частей ДУ.

Пример 1. $y''' = \sin x$

$$\int y'''dx = \int \sin x dx \quad \to \quad y'' = -\cos x + C_1$$
$$\int y''dx = \int(-\cos x + C_1)dx \quad \to \quad y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$
$$\int y'dx = \int(-\sin x + C_1 x + C_2)dx \quad \to \quad y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Случаи 2-4. ДУ допускает понижение порядка в результате специальных замен.

Случай 2.

ДУ имеет вид: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ - ДУ не содержит y.

Замена: вводится новая функция: $z(x) = y^{(k)}$, тогда $y^{(k+1)} = z'$ и т.д.

Пример 2. $(x^2 + 1)y'' = 2x \cdot y'$ - ДУ 2-го порядка не содержит y.

Замена: $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$

Получим: $(x^2 + 1)z' = 2x \cdot z$ - ДУ 1-го порядка

Случай 3.

ДУ имеет вид: $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ - ДУ не содержит x.

Замена: вводится новая переменная: y
вводится новая функция: $p(y) = y'$, тогда

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

Пример 3. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$ - ДУ 2-го порядка не содержит x.

Замена: $y' = p(y)$, тогда $y'' = p' \cdot p$

Получим: $p^2 + 2y \cdot p' = 0$ - ДУ 1-го порядка

Случай 4.

ДУ является *однородным относительно* y *и производных*, а это значит оно не меняется в результате одновременной замены y на $k\cdot y$, y' на $k\cdot y'$ и т.д., где k – любое число, не равное 0.

Замена: вводится новая функция: $z(x)=\dfrac{y'}{y}$ или $y'=z\cdot y$, тогда

$$y''=(z\cdot y)'=z'\cdot y+z\cdot y'=z'\cdot y+z\cdot(z\cdot y)=z'\cdot y+z^2\cdot y$$

Пример 4. $x\cdot y\cdot y''-x\cdot(y')^2=y\cdot y'$ - ДУ 2-го порядка содержит x и y.

Проверяем на однородность: $x\cdot(ky)\cdot(ky'')-x\cdot(ky')^2=ky\cdot ky'$ - каждое слагаемое в ДУ содержит k^2, сократив на которое ($k\neq 0$), получим исходное ДУ.

Замена: $y'=z(x)\cdot y$, тогда $y''=z'\cdot y+z^2\cdot y$

Получим: $x\cdot y\cdot(z'\cdot y+z^2\cdot y)-x\cdot(z\cdot y)^2=y\cdot z\cdot y$

$x\cdot z'\cdot y^2+x\cdot z^2\cdot y^2-x\cdot z^2\cdot y^2=y^2\cdot z$

$x\cdot z'+x\cdot z^2-x\cdot z^2=z$

$x\cdot z'=z$ - ДУ 1-го порядка

Общий алгоритм решения ДУ высшего порядка, допускающего понижение порядка

1. Понизить порядок ДУ до 1-го, используя необходимые замены.

2. Решить ДУ 1-го порядка.

3. Сделать обратные замены. Если необходимо опять понизить порядок (п.1-2). Всего нужно решить n ДУ 1-го порядка.

4. Выписать все решения ДУ. Хотя бы одно из них должно содержать n произвольных постоянных.

5. Проверить потерянные решения.

6. Записать ответ.

Примеры: Решить ДУ высших порядков

№2 Дано: $(x^2+1)y''=2x\cdot y'$

Решение: $y=C_1\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$

№3 Дано: $(y')^2+2y\cdot y''=0$

Решение: $\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2,\quad y=C$

№4 Дано: $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'$

Решение: $\ln y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2, \quad y = C$

Алгоритм решения задачи Коши для ДУ n -го порядка

1. Решить ДУ. Записать его общее решение.

2. Продифференцировать общее решение n раз.

3. Объединить общее решение и все производные.

4. Подставить в полученные выражения начальные условия. Получится система алгебраических уравнений, относительно произвольных постоянных $C_1, C_2 ... C_n$.

5. Решить систему. Найти $C_1, C_2 ... C_n$.

6. Подставить найденные значения в общее решение – это решение задачи Коши.

Примеры: Решить задачу Коши для ДУ 2-го порядка

№5 Дано: $(x^2+1)y'' = 2x \cdot y'$

$y(1) = 1$

$y'(1) = 2$

Решение: $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}$