Лекции № 2 и № 3

Тема: Различные типы ДУ 1-го порядка

ДУ с разделяющимися переменными

ДУ с разделяющимися переменными имеет вид: $y' = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ $*$

Правая часть такого уравнения может быть представлена в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от y, а другая только от x.

Алгоритм решения

1. Привести уравнение к виду $*$, записать его тип.
2. Представить y' в виде $\dfrac{dy}{dx}$.
3. Умножить или разделить обе части уравнения на такие выражения, чтобы слева оказались только функции y и дифференциал dy, а справа – функции только x и дифференциал dx (дифференциалы должны оказаться в числителе).
4. Проинтегрировать левую часть уравнения по y, а правую – по x. Константу интегрирования C записать только справа. Результат интегрирования – решение ДУ.
5. Проверить возможно потерянные решения. (см. Замечание)
6. Записать в ответ общее решение ДУ.

Замечание. В процессе решения ДУ могли быть потеряны решения. Такими потерянными решениями могут быть функции, обращающие в ноль выражения, оказавшиеся в знаменателях левой и правой частей уравнения или сокращенные при разделении переменных.

Примеры: Решить ДУ с разделяющимися переменными

№1 Дано: $x \cdot y + (x+1)y' = 0$

Решение: $y = C \cdot e^{-x}(x+1)$

№2 Дано: $\sqrt{y^2+1} \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$

Решение: $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C, \quad x = 0$

Однородные ДУ 1-го порядка

Определение. ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, называется однородным ДУ 1-го порядка, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями своих аргументов одной и той же степени.

Определение. Функция $M(x,y)$ называется однородной функцией своих аргументов степени n, если для любого числа $k > 0$ верно: $M(kx,ky) = k^n M(x,y)$

Пример:

$M(x,y) = x^2 + xy$

$M(kx,ky) = (kx)^2 + kx \cdot ky = k^2(x^2 + xy) = k^2 M(x,y)$ - однородная функция степени 2.

Однородное ДУ 1-го порядка может быть представлено в виде: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad *$

Алгоритм решения однородного ДУ 1-го порядка

1. Привести уравнение к виду $*$, записать его тип.
2. Сделать замену: $z = \frac{y}{x}$, где $z = z(x)$. Тогда $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$
3. Подставить полученные выражения в ДУ Ω, получится $z' \cdot x + z = f(z)$ - это ДУ с разделяющимися переменными.
4. Решить полученное ДУ.
5. Сделать обратную замену.
6. Проверить возможно потерянные решения.
7. Записать в ответ общее решение ДУ.

Примеры: Решить однородное ДУ 1-го порядка:

Решить однородное ДУ:

№3 Дано: $\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - \ln x}{x}$

Решение: $\ln\frac{y}{x} = Cx + 1$

Линейные ДУ 1-го порядка

Определение. ДУ называется линейным, если неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно.

Линейное ДУ 1-го порядка имеет вид: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ $\quad *$

или

$x' = a(y) \cdot x + b(y)$

Определение. Если функция $b(x) = 0$, то ДУ называется линейным однородным уравнением, если же $b(x) \neq 0$, то соответственно линейным неоднородным.

Алгоритм решения уравнения методом вариации произвольной постоянной

1. Привести уравнение к виду $*$, записать его тип.
2. Записать соответствующее однородное ДУ 1-го порядка: $y' = a(x) \cdot y$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.
3. Решить полученное однородное уравнение, записать его решение в виде: $y = \varphi(x, C)$.
4. В полученном решении заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$.
5. Подставить решение из п.4. в уравнение $*$, и выразить из него $C'(x)$
6. Найти $C(x)$: $C(x) = \int C'(x)dx + \widetilde{C}$.
7. Подставить найденное выражение для $C(x)$ в решение из п. 4. Это – решение исходного линейного уравнения.
8. Проверить возможно потерянные решения.
9. Записать в ответ общее решение ДУ.

Примеры: Решить линейные неоднородные ДУ методом вариации произвольной постоянной

№4 <u>Дано:</u> $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

<u>Решение:</u> $y = (x^2 + C)x^2$

№5 <u>Дано:</u> $y \cdot dx = (x + y^2)dy$

<u>Решение:</u> $x = (y + C)y, \quad y = 0$

Алгоритм решения уравнения методом подстановки

1. Привести уравнение к виду $*$, записать его тип.
2. Представить $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставить полученные выражения в уравнение Ω:

$$u' \cdot v + u \cdot v' = a(x) \cdot u \cdot v + b(x)$$
$$u' \cdot v + u \cdot \left[v' - a(x) \cdot v\right] = b(x)$$

3. Найти функцию v, обращающую в ноль выражение стоящее в скобках: $v' - a(x) \cdot v = 0$ - это ДУ с разделяющимися переменными. Получится $v = \varphi(x)$. Константу интегрирования C при этом не пишут.
4. Подставить полученную функцию v в уравнение из п .2, получится:

$u' \cdot \varphi(x) = b(x)$ или

$u' = b(x)/\varphi(x)$

5. Найти u: $u = \int u' dx + C$.
6. Подставить найденные выражения для u и v в $y = u \cdot v$. Это – решение исходного линейного уравнения.
7. Проверить возможно потерянные решения.
8. Записать в ответ общее решение ДУ.

Примеры: Решить линейное неоднородное ДУ методом подстановки

№6 Дано: $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

Решение: $y = (x^2 + C)x^2$

ДУ Бернулли

ДУ Бернулли имеет вид: $y' = a(x)\cdot y + b(x)\cdot y^n,\ n \neq 0,1$ *

или

$x' = a(y)\cdot x + b(y)\cdot x^n \quad n \neq 0,1$

Алгоритм решения

1. Привести уравнение к виду *, записать его тип.
2. Разделить обе части уравнения на y^n.
3. Сделать замену:

$z = \dfrac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{z'\cdot y^n}{(1-n)}$

4. Подставить полученные выражения в уравнение из п. 2. Получится линейное неоднородное ДУ.
5. Решить линейное ДУ любым методом. Найти его решение $z = \varphi(x, C)$
6. Сделать обратную замену: $y^{1-n} = \varphi(x, C)$
7. Проверить возможно потерянные решения.
8. Записать в ответ общее решение ДУ.

Примеры: Решить ДУ Бернулли

№7 Дано: $y' = y^4\cdot\cos(x) + y\cdot\mathrm{tg}(x)$

Решение: $y^{-3} = \cos^3 x\cdot(-3\mathrm{tg}(x) + C), \quad y = 0$

ДУ в полных дифференциалах

Определение. ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ $*$, называется ДУ в полных дифференциалах, если левая часть ДУ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y) = C$. Это условие будет выполняться, если верно: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ $**$.

Замечание. Если ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является ДУ в полных дифференциалах, то его решением является функция $F(x,y) = C$ для которой верно: $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

Алгоритм решения ДУ в полных дифференциалах

1. Привести уравнение к виду $*$, проверить условие $**$, записать тип ДУ.
2. Записать вид искомого решения: $F(x,y) = C$ и соответствующие условия:
   а) $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$
   б) $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.
3. Выбрать для поиска решения любое из условий а) или б). Найти из выбранного условия функцию $F(x,y)$, проинтегрировав левую и правую части условия по x или y соответственно:
   а) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$
   б) $F(x,y) = \int N(x,y)dy + C(x)$
4. Продифференцировать полученное выражение в случае а) по y, а в случае б) по x. Приравнять в случае а) полученную производную к $N(x,y)$ и выразить из равенства $C'(y)$, а в случае б) приравнять производную к $M(x,y)$ и выразить из равенства $C'(x)$.
5. Найти:
   а) $C(y) = \int C'(y)dy$
   б) $C(x) = \int C'(x)dx$
6. Записать функцию $F(x,y)$.
7. Записать в ответ общее решение ДУ.

Примеры: Решить ДУ в полных дифференциалах:

№8 Дано: $2x \cdot y \cdot dx = (y^2 - x^2)dy$

Решение: $x^2 y - \dfrac{y^3}{3} = C$

ДУ 1-го порядка неразрешенные относительно производной

ДУ 1-го порядка неразрешенное относительно производной характеризуется тем, что из него не может быть легко выражена производная y'.

В общем случае алгоритмических методов решения таких ДУ не существует, кроме случаев, когда из ДУ легко выражается x или y. В этом случае используют метод введения параметра.

Алгоритм решения ДУ методом введения параметра

Из ДУ легко выражается $y: y = f(x, y')$	***Из ДУ легко выражается*** $x: x = f(y, y')$
1. Разрешить ДУ относительно $y: y = f(x, y')$	1. Разрешить ДУ относительно $x: x = f(y, y')$
2. Ввести параметр $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, тогда получится: $y = f(x, p)$	$x = f(y, p)$
3. Взять полный дифференциал правой и левой частей уравнения, получится: $dy = \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp$	$dx = \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$
4. Сделать замену в левой части ДУ: $dy = pdx$ (см. П.2), получится: $pdx = \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp$ Это ДУ 1-го порядка разрешенное относительно производной	$dx = \dfrac{dy}{p}$ (см. П.2), получится: $\dfrac{dy}{p} = \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$ Это ДУ 1-го порядка разрешенное относительно производной
5. Решить полученное ДУ, записать его решение: $x = \varphi(p, C)$	$y = \varphi(p, C)$
6. Записать решение исходного ДУ в параметрической форме: $\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$	$\begin{cases} x = f(\varphi(p, C), p) \\ y = \varphi(p, C) \end{cases}$
7. Проверить потерянные решения: все потерянные решения вида $p = ...$, подставляются в выражение из п. 2 алгоритма и принимают вид: $y = ...$ или $x = ...$ Затем следует проверка подстановкой в исходное ДУ	
8. Записать общее решение ДУ	

Примеры: Решить ДУ неразрешенные относительно производной:

_№9_ Дано: $y = \ln(1 + (y')^2)$

Решение: $\begin{cases} x = 2\mathrm{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1 + p^2) \end{cases}$, $y = 0$

_№10_ Дано: $y' \cdot (x - \ln y') = 1$

Решение: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}$