Курс: Дифференциальные уравнения

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. -М.: Наука, 1969.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1973

Лекция № 1

Дифференциальные уравнения являются одним из основных математических понятий, применяемых при решении практических задач. Это объясняется тем, что при исследовании физических процессов очень часто выявляется связь между величинами, описывающими исследуемые явления и их производными или дифференциалами.

Пример. Описать движение тела массы m, брошенного в момент времени $t=0$ вертикально вверх из положения y_0 со скоростью V_0, под действием силы тяжести.

На основании 2-го закона Ньютона получим:

$$y''=-g,$$
$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=V_0$$

Решение задачи исследование физического процесса можно разделить на два этапа:

1. Составление дифференциального уравнения, которое при определенных предположениях, описывает физический процесс. Решается в курсах общей физики, механики, мат. моделирования, специальных курсах.
2. Нахождение решения дифференциального уравнения, то есть зависимости между величинами, характеризующими физический процесс. Решается в курсе дифференциальных уравнений. В рассматриваемом примере решение дифференциального уравнения это зависимость вертикальной координаты тела от времени $y(t)$, зная которую можно рассчитать, например, время падения тела на землю и т.д.

Основные понятия и определения

Рассматриваются следующие обозначения:

x - независимая переменная

$y(x)$ - неизвестная функция переменной x

$y', y'', y''', y^{(4)} \ldots y^{(n)} \ldots$ - производные неизвестной функции 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и т.д. n-го порядков

$dy, d^2y, d^3y \ldots$ - дифференциалы неизвестной функции 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков

Определение 1. Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в которое неизвестная функция $y(x)$ входит под знаком производной или дифференциала.

Определение 2. Порядок ДУ – это порядок (номер) старшей производной или дифференциала неизвестной функции $y(x)$, входящей в уравнение.

Общий вид ДУ n-го порядка: $F(x, y, y', y'', y''' \ldots y^{(n)}) = 0$

Определение 3. ДУ называется разрешенным относительно производной, если из ДУ может быть выражена в явном виде старшая производная.

Общий вид ДУ n-го порядка, разрешенного относительно производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y'''....y^{(n-1)})$$

Определение 4. Процесс нахождения решения ДУ называется интегрированием ДУ.

Определение 5. Решением ДУ называется такая функция $y(x)$, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество.

Поскольку процесс нахождения решения ДУ связан с многократным (n кратным) интегрированием, получаемое в результате решение содержит n произвольных постоянных (констант), свободных для выбора. Таким образом, любое ДУ имеет бесконечное множество решений, подчиняющихся определенным закономерностям.

Определение 6. Общим решением ДУ называется множество, содержащее все без исключения решения ДУ.

Общий вид общего решения ДУ n-го порядка:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2..C_n) = 0 \qquad \text{(вид А)}$$

или

$$y = \varphi(x, C_1, C_2..C_n) \qquad \text{(вид Б)}$$

Часто общее решение ДУ вида А называют общим интегралом ДУ, а общее решение вида Б семейством интегральных кривых.

Определение 7. Частным решением ДУ называется любое решение, получаемое из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2...C_n$. Значения произвольных постоянных, как правило, определяются из некоторых заданных условий.

Пример.

Дано ДУ 2-го порядка: $y'' + y = 0$

Общее решение данного ДУ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Частное решение данного ДУ, полученное при условиях, что $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$: $y = \cos x + 2\sin x$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{(форма 1)}$$

или

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(форма 2)}$$

Часто ДУ 1-го порядка заданы в форме явно содержащей дифференциал неизвестной функции dy:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \text{(форма 3)}$$

Очевидно, что от формы 2 записи ДУ легко перейти к форме 3 и наоборот, покажем это:

$$y' = f(x, y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = f(x, y) \;\Rightarrow\; dy = f(x, y)dx \;\Rightarrow\; \underbrace{f(x, y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(-1)}_{N(x,y)}dy = 0$$

или

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \;\Rightarrow\; M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \;\Rightarrow\; y' = \underbrace{-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}}_{f(x,y)}$$

Общий вид общего решения ДУ 1-го порядка:

$\Phi(x,y,C) = 0$ (общий интеграл)

или

$y = \varphi(x,C)$ (семейство интегральных кривых)

Геометрический смысл ДУ 1-го порядка

Пусть в некоторой области D ДУ 1-го порядка $y' = f(x,y)$ имеет решение $y = \varphi(x,C)$. Тогда, исходя из геометрического смысла производной, получим, что в любой точке P плоскости (x,y) касательная к интегральной кривой имеет угловой коэффициент (тангенс угла наклона) равный $f(x,y)$.

Определение 8. Направления касательных к интегральным кривым образует поле направлений. Построить поле направлений значит вычислить тангенс угла наклона касательных к интегральным кривым в каждой точке плоскости (x,y), где определена $f(x,y)$.

Определение 9. Геометрическое место точек плоскости (x,y), в которых поле направлений постоянно называется изоклиной.

Существование и единственность решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Задача Коши

При решении практических задач, как правило, необходимо найти не общее, а частные решения ДУ, соответствующие определенным априори известным условиям. Обычно это так называемые начальные условия, которые накладываются на искомую функцию $y(x)$ в заданной точке x_0.

Определение 10. Задачей Коши для ДУ 1-го называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0 \leftarrow \text{const}$.

Поскольку задача Коши носит исключительно прикладной характер, возникает вопросы: существует ли решение ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию и будет ли оно единственным.

Теорема Коши

Дано: $y' = f(x,y)$,

$y(x_0) = y_0$

Пусть функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ определены и непрерывны в некоторой открытой области D, содержащей точку $P_0 = (x_0, y_o)$, то в достаточно малом интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$ ДУ имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Существование решения при этом утверждается на достаточно малом интервале, а единственность в пределах рассматриваемой области.

Утверждение.

1) Если функция $f(x,y)$ непрерывна , то в интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует решение ДУ.

2) Если частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в рассматриваемой области, то это решение является единственным.

Примеры:

Проанализировать поставленные задачи Коши

1) $y' = \frac{y}{x}, \quad y(0) = 1$

2) $y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 0$

<u>Решение примера 1</u>

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x, y) = \frac{y}{x}$ - это функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки, точки задаваемой начальными условиями: $P_0 = (0,1)$. Очевидно, что в самой точке $P_0 = (0,1)$ функция имеет разрыв, а, следовательно, не является непрерывной.

Вывод: задача Коши не имеет решений.

Для сравнения, общее решение данного ДУ: $y = C \cdot x$, очевидно, что при подстановке начальных условий в общее решение получим: $1 = 0$

<u>Решение примера 2</u>

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x, y) = x\sqrt{y}$ - это функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки, точки задаваемой начальными условиями: $P_0 = (1,0)$. Очевидно, что функция не имеет разрывов, а, следовательно, является непрерывной.

Вывод: задача Коши имеет решение.

Рассмотрим частную производную функции $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ - это также функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки $P_0 = (1,0)$. Очевидно, что в самой точке $P_0 = (1,0)$ функция имеет разрыв, а, следовательно, не является непрерывной.

Вывод: задача Коши имеет более одного решения.

Для сравнения, общее решение данного ДУ: $\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + C, \quad y = 0$, очевидно, что при подстановке начальных условий в общее решение получим два решения задачи Коши: $\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}, \quad y = 0$