Решение примеров к лекции № 6

Пример №2. Решить СЛОДУ методом Эйлера

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Замечание.
В первую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из первого уравнения системы.
Во вторую строку матрицы записываются коэффициенты при функции x, а затем y из второго уравнения системы.

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 3\cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы , решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 6^2 - 4\cdot 5 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{6-\sqrt{16}}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{6+\sqrt{16}}{2} = 5$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, действительные.

3.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 1$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_1 из уравнения:

$$(A - \lambda_1 E)\cdot V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2 = 1$, тогда из первого уравнения системы $v_1 = -3v_2 = -3$.
Окончательно:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 5$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 = 1$.
Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Запишем решение системы в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5 \cdot t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

<u>Проверка:</u>

Из решения: $\dot{x} = -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$ и $\dot{y} = C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$

Подставим выражения для x, y, $\dot{x}$ в первое уравнение исходной системы:

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = 2(-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 3(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -6C_1 \cdot e^t + 2C_2 \cdot e^{5t} + 3C_1 \cdot e^t + 3C_2 \cdot e^{5t}$$

$$-3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv -3C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x, y, $\dot{y}$ во второе уравнение исходной системы:

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = (-3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t}) + 4(C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t})$$

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} + 4C_1 \cdot e^t + 4C_2 \cdot e^{5t}$$

$$C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t} \equiv C_1 \cdot e^t + 5C_2 \cdot e^{5t}$$

получено верное тождество

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{5 \cdot t} \\ y = C_1 \cdot e^{1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{5 \cdot t} \end{cases}}$

Пример №3. Решить СЛОДУ методом Эйлера

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 3\cdot(-3) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы , решив уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 2^2 - 4\cdot 10 = -36$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2} = 1 - 3\,i \qquad \lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{-36}}{2} = 1 + 3\,i$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, комплексно-сопряженные.

3. Т.к. корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 простые, комплексно-сопряженные, выберем любой из них, например $\lambda_2 = 1 + 3\,i$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 1 + 3\,i$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1-1-3\,i & -3 \\ 3 & 1-1-3\,i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,i & -3 \\ 3 & -3\,i \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A - \lambda_2 E)\cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3\,i & -3 \\ 3 & -3\,i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3\,i\cdot v_1 - 3v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3\,i\cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:
Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 \cdot i = i$.
Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произведение:

$$P = V_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+3i)\cdot t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot [\cos(3t) + i\cdot\sin(3t)]\cdot e^t = \begin{pmatrix} i\cdot\cos(3t) + i^2\cdot\sin(3t) \\ \cos(3t) + i\cdot\sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(3t) + i\cdot\cos(3t) \\ \cos(3t) + i\cdot\sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t$$

Окончательно:

$$P = \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t + i\cdot\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t$$

4. Запишем решение системы в векторной форме в виде линейной комбинации действительной и мнимой частей полученного произведения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t + C_2\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -C_1\sin(3t)\cdot e^t + C_2\cos(3t)\cdot e^t \\ y = C_1\cos(3t)\cdot e^t + C_2\sin(3t)\cdot e^t \end{cases}$$

<u>Проверка:</u>

Из решения:

$$\dot{x} = -3C_1\cos(3t)\cdot e^t - C_1\sin(3t)\cdot e^t - 3C_2\sin(3t)\cdot e^t + C_2\cos(3t)\cdot e^t =$$

$$= (-3C_1 + C_2)\cos(3t) + (-C_1 - 3C_2)\sin(3t)$$

$$\dot{y} = -3C_1\sin(3t)\cdot e^t + C_1\cos(3t)\cdot e^t + 3C_2\cos(3t)\cdot e^t + C_2\cdot\sin(3t)\cdot e^t =$$

$$= (C_1 + 3C_2)\cos(3t) + (-3C_1 + C_2)\sin(3t)$$

Подставим выражения для x, y, $\dot{x}$ в первое уравнение исходной системы:

$$(-3C_1 + C_2)\cos(3t)\cdot e^t + (-C_1 - 3C_2)\sin(3t)\cdot e^t =$$

$$= -C_1\sin(3t)\cdot e^t + C_2\cos(3t)\cdot e^t - 3(C_1\cos(3t)\cdot e^t + C_2\sin(3t)\cdot e^t)$$

$$(-3C_1 + C_2)\cos(3t) + (-C_1 - 3C_2)\sin(3t) = -C_1\sin(3t) + C_2\cos(3t) - 3C_1\cos(3t) - 3C_2\sin(3t)$$

$$\underline{(-3C_1 + C_2)\cos(3t) + (-C_1 - 3C_2)\sin(3t) \equiv (-3C_1 + C_2)\cos(3t) + (-C_1 - 3C_2)\sin(3t)}$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x, y, $\dot{y}$ во второе уравнение исходной системы:

$$(C_1 + 3C_2)\cos(3t)\cdot e^t + (-3C_1 + C_2)\sin(3t)\cdot e^t =$$

$$= -3C_1\sin(3t)\cdot e^t + 3C_2\cos(3t)\cdot e^t + C_1\cos(3t)\cdot e^t + C_2\sin(3t)\cdot e^t$$

$$\underline{(C_1 + 3C_2)\cos(3t) + (-3C_1 + C_2)\sin(3t) \equiv (C_1 + 3C_2)\cos(3t) + (-3C_1 + C_2)\sin(3t)}$$

получено верное тождество

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = -C_1\sin(3t)\cdot e^t + C_2\cos(3t)\cdot e^t \\ y = C_1\cos(3t)\cdot e^t + C_2\sin(3t)\cdot e^t \end{cases}}$

Пример №4. Решить СЛОДУ методом Эйлера

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 1\cdot(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы , решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$D = 36^2 - 4\cdot 9 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{0}}{2} = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{0}}{2} = 3$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – кратные, действительные.

3.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для данной матрицы найдется только один линейно-независимый собственный вектор, поэтому будем искать решение СЛОДУ в виде:

$$x = (a + b\cdot t)\cdot e^{3t}$$

$$y = (c + d\cdot t)\cdot e^{3t}$$

Тогда:

$$x = a\cdot e^{3t} + b\cdot t\cdot e^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = 3a\cdot e^{3t} + b\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})$$

$$y = c\cdot e^{3t} + d\cdot t\cdot e^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = 3c\cdot e^{3t} + d\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})$$

Подставим полученные выражения в первое уравнение системы:

$$\underbrace{3a\cdot e^{3t} + b\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})}_{\dot{x}} = 2\cdot\underbrace{(a\cdot e^{3t} + b\cdot t\cdot e^{3t})}_{x} + \underbrace{(c\cdot e^{3t} + d\cdot t\cdot e^{3t})}_{y}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$(3a+b)\cdot e^{3t}+3b\cdot t\cdot e^{3t}=(2a+c)\cdot e^{3t}+(2b+d)\cdot t\cdot e^{3t}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях переменной t в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases}3a+b=2a+c\\3b=2b+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=c\\b=d\end{cases}$$

Подставим полученные выражения во второе уравнение системы:

$$\underbrace{3c\cdot e^{3t}+d\cdot(e^{3t}+3t\cdot e^{3t})}_{\dot{y}}=4\cdot\underbrace{(c\cdot e^{3t}+d\cdot t\cdot e^{3t})}_{y}-\underbrace{(a\cdot e^{3t}+b\cdot t\cdot e^{3t})}_{x}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$(3c+d)\cdot e^{3t}+3d\cdot t\cdot e^{3t}=(4c-a)\cdot e^{3t}+(4d-b)\cdot t\cdot e^{3t}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях переменной t в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases}3c+d=4c-a\\3d=4d-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+d=c\\b=d\end{cases}$$

Объединим соотношения для отыскания коэффициентов:

$$\begin{cases}a+b=c\\b=d\\a+d=c\\b=d\end{cases}$$

Очевидно, что в данной системе совпадают уравнения 2-е и 4-е, а также 1-е и 3-е при условии, что $b=d$.

Для нахождения решения введем произвольные постоянные: $a=C_1$ и $b=C_2$.

Тогда: $c=C_1+C_2$ (из первого уравнения)

$d=C_2$ (из второго уравнения)

4. Окончательно:

$$x=(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{3t}$$

$$y=(C_1+C_2+C_2\cdot t)\cdot e^{3t}$$

Проверка:

Из решения: $\dot{x}=3C_1\cdot e^{3t}+C_2\cdot(e^{3t}+3t\cdot e^{3t})$ и $\dot{y}=3(C_1+C_2)\cdot e^{3t}+C_2\cdot(e^{3t}+3t\cdot e^{3t})$

Подставим выражения для x, y, $\dot{x}$ в первое уравнение исходной системы:

$$3C_1\cdot e^{3t}+C_2\cdot(e^{3t}+3t\cdot e^{3t})=2\cdot(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{3t}+(C_1+C_2+C_2\cdot t)\cdot e^{3t}$$

$$3C_1+C_2+3C_2\cdot t=2C_1+2C_2\cdot t+C_1+C_2+C_2\cdot t$$

$$3C_1+C_2+3C_2\cdot t\equiv 3C_1+C_2+3C_2\cdot t$$

получено верное тождество

Подставим выражения для x, y, $\dot{y}$ во второе уравнение исходной системы:

$$3(C_1+C_2)\cdot e^{3t}+C_2\cdot(e^{3t}+3t\cdot e^{3t})=4\cdot(C_1+C_2+C_2\cdot t)\cdot e^{3t}-(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{3t}$$

$$3C_1+4C_2+3C_2\cdot t=4C_1+4C_2+4C_2\cdot t-C_1-C_2\cdot t$$

$$3C_1 + 4C_2 + 3C_2 \cdot t \equiv 3C_1 + 4C_2 + 3C_2 \cdot t$$

получено верное тождество

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \end{cases}}$