

## Решение примеров к лекции №5

### Пример №1. Решить ЛОДУ

Дано:  $y'' + y' - 2y = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

Это квадратное уравнение, вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a = 1$ ,  $b = 1$  и  $c = -2$ .

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = -2$  - простой действительный корень

$\lambda_2 = 1$  - простой действительный корень

Получим:  $y = C_1 \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{1 \cdot x}$

Для корня  $\lambda_1 = -2$

Для корня  $\lambda_2 = 1$

Ответ:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

**Пример №2. Решить ЛОДУ**Дано:  $4y'' + 4y' + y = 0$ Решение:1. Составим характеристическое уравнение:  $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ 

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4 \cdot 2} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ - кратный действительный корень}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \text{ - кратный действительный корень}$$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений)  $k = 2$ .

Получим:  $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Для корней

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Ответ:  $y = (C_1 + C_2 x) e^{-1/2x}$

**Пример №3. Решить ЛОДУ**Дано:  $y'' + 4y' + 5y = 0$ Решение:1. Составим характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ 

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = 16 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \cdot i}{2} = -2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -2 + i \\ \lambda_2 &= -2 - i \end{aligned}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

 $\lambda_1 = -2 + i$  - комплексно-сопряженный простой корень, действительная часть  $\alpha = -2$ , мнимая  $\beta = 1$  $\lambda_2 = -2 - i$  - комплексно-сопряженный простой корень, действительная часть  $\alpha = -2$ , мнимая  $\beta = 1$ Получим:  $y = C_1 \cos(1 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \sin(1 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x}$ 

Для корней  
 $\lambda_1 = -2 + i$  и  $\lambda_2 = -2 - i$

Ответ:  $y = C_1 \cos x \cdot e^{-2x} + C_2 \sin x \cdot e^{-2x}$

**Пример №4. Решить ЛОДУ**

Дано:  $y^{(6)} + 18y^{(4)} + 81y'' = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение:  $\lambda^6 + 18\lambda^4 + 81\lambda^2 = 0$

2. Решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81) = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \text{ и } \lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$$

$$\text{Решаем } \lambda^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0} = 0}$$

Решаем  $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$  - биквадратное уравнение

Замена:  $\lambda^2 = t$ , получим  $t^2 + 18 \cdot t + 81 = 0$  - квадратное уравнение

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{0}}{2} = -9$$

$$\text{Получили: } t_1 = \lambda^2 = -9 \Rightarrow \boxed{\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i}$$

$$t_2 = \lambda^2 = -9 \Rightarrow \boxed{\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = 0$  - действительный корень

$\lambda_2 = 0$  - действительный корень

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений)  $k = 2$ .

$\lambda_3 = 3i$  - комплексно-сопряженный корень, действительная часть  $\alpha = 0$ , мнимая  $\beta = 3$

$\lambda_5 = 3i$  - комплексно-сопряженный корень, действительная часть  $\alpha = 0$ , мнимая  $\beta = 3$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений)  $k = 2$ .

$\lambda_4 = -3i$  - комплексно-сопряженный корень, действительная часть  $\alpha = 0$ , мнимая  $\beta = 3$

$\lambda_6 = -3i$  - комплексно-сопряженный корень, действительная часть  $\alpha = 0$ , мнимая  $\beta = 3$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений)  $k = 2$ .

Получим:

$$y = (C_1x + C_2) \cdot e^{0 \cdot x} + (C_3 + C_4x) \cdot \cos(3 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x} + (C_5 + C_6x) \cdot \sin(3 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x}$$

Для корней  
 $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$

Для корней  
 $\lambda_3 = 3i$  и  $\lambda_5 = 3i$

Для корней  
 $\lambda_4 = -3i$  и  $\lambda_6 = -3i$

Ответ:  $y = C_1x + C_2 + (C_3 + C_4x) \cdot \cos(3x) + (C_5 + C_6x) \cdot \sin(3x)$

**Пример №5. Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной**

Дано:  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

Решение:

1. Решаем ЛОДУ с той же левой частью:  $y'' + 2y' + y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x}$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{y_2(x)}$$

2. Заменяем в полученном решении произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{y_2(x)}$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \\ C_1' \cdot (e^{-x})' + C_2' \cdot (x \cdot e^{-x})' = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \\ -C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot (e^{-x} - x \cdot e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' \cdot x = 0 \\ -C_1' + C_2' \cdot (1 - x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Из первого уравнения:  $C_1' = -x \cdot C_2'$

Подставим во второе уравнение:

$$x \cdot C_2' + C_2' - x \cdot C_2' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2' = \frac{1}{x}}, \text{ тогда } \boxed{C_1' = -1}$$

4. Найдем неизвестные функции:

$$C_1(x) = \int -1 dx = -x + \hat{C}_1 \quad C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \hat{C}_2$$

5. Подставим в решение из п. 2:

$$y = (-x + \hat{C}_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + \hat{C}_2) \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$y = \underbrace{\hat{C}_1 \cdot e^{-x} + \hat{C}_2 \cdot x \cdot e^{-x}}_{\text{решение ЛОДУ}} - \underbrace{x \cdot e^{-x} + \ln|x| \cdot x \cdot e^{-x}}_{\text{частное решение}} - \text{решение ЛНДУ}$$

Ответ:  $y = (-x + C_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + C_2) \cdot x \cdot e^{-x}$

**Пример №6. Решить ЛНДУ методом вариации произвольной постоянной**

Дано:  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

Решение:

1. Решаем ЛОДУ с той же левой частью:  $y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -2i \\ \lambda_2 &= 2i \end{aligned}$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}$$

2. Заменяем в полученном решении произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos(2x) + C_2' \cdot \sin(2x) = 0 \\ C_1' \cdot (\cos(2x))' + C_2' \cdot (\sin(2x))' = \frac{1}{\sin 2x} \end{cases}$$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos(2x) + C_2' \cdot \sin(2x) = 0 \\ -2C_1' \cdot \sin(2x) + 2C_2' \cdot \cos(2x) = \frac{1}{\sin 2x} \end{cases}$$

Из первого уравнения:  $C_1' = \frac{-C_2' \sin(2x)}{\cos(2x)}$

Подставим во второе уравнение:  $\frac{2C_2' \cdot \sin^2(2x)}{\cos(2x)} + 2C_2' \cos(2x) = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow$

$$\frac{2C_2' \cdot \sin^2(2x) + 2C_2' \cos^2(2x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2C_2'}{\cos(2x)} = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{C_2' = \text{ctg}(2x)}, \text{ тогда } \boxed{C_1' = -1}$$

4. Найдем неизвестные функции:

$$C_1(x) = \int -1 dx = -x + \hat{C}_1 \quad C_2(x) = \int \text{ctg}(2x) dx = \frac{1}{2} \ln|\sin(2x)| + \hat{C}_2$$

5. Подставим в решение из п. 2:

$$y = (-x + \hat{C}_1) \cdot \cos(2x) + (0.5 \cdot \ln|\sin(2x)| + \hat{C}_2) \cdot \sin(2x)$$

$$y = \underbrace{\hat{C}_1 \cdot \cos(2x) + \hat{C}_2 \cdot \sin(2x)}_{\text{решение ЛОДУ}} - \underbrace{x \cdot \cos(2x) + 0.5 \cdot \ln|\sin(2x)| \cdot \sin(2x)}_{\text{частное решение}} - \text{решение ЛНДУ}$$

Ответ:  $\boxed{y = (-x + \hat{C}_1) \cdot \cos(2x) + (0.5 \cdot \ln|\sin(2x)| + \hat{C}_2) \cdot \sin(2x)}$

**Пример №7. Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения**

Дано:  $y^{IV} + 4y'' = 5x + e^{2x}$

Решение:

1) Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y^{IV} + 4y'' = 0$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 + C_2x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

2) Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$5x$	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$m = 1$
2 слагаемое:	$e^{2x}$	$\alpha = 2$	$\beta = 0$	$m = 0$

3) Так как  $\alpha$  и  $\beta$  у слагаемых разные, то группировки нет, каждое слагаемое – отдельная группа.

1 слагаемое:	$5x$	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	$e^{2x}$	$\alpha = 2$	$\beta = 0$	$m = 0$	2 группа

4) Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

Первое частное решение:  $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

$$y_{\text{част1}} = x^S \cdot (b_0 + b_1x) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \rightarrow S = 2$$

Окончательно:  $y_{\text{част1}} = x^2 \cdot (b_0 + b_1x) \cdot e^{0 \cdot x}$

Второе частное решение:  $\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$

$$y_{\text{част2}} = x^S \cdot (b_2) \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 0 = 2 \rightarrow S = 0$$

Окончательно:  $y_{\text{част2}} = (b_2) \cdot e^{2 \cdot x}$

6) Записываем структуру общего решения ЛНДУ:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част1}} + y_{\text{част2}}$$

Ответ:  $y = C_1 + C_2x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) + x^2 \cdot (b_0 + b_1x) + b_2 \cdot e^{2x}$

**Пример №8. Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения**

Дано:  $y'' + 4y = \cos(2x) + 4x^2 - 3x \cdot \sin(2x)$

Решение:

1) Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

2) Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$\cos(2x)$	$\alpha = 0$	$\beta = 2$	$m = 0$
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$m = 2$
3 слагаемое:	$-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0$	$\beta = 2$	$m = 1$

3) Группируем слагаемые с одинаковыми параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ :

1 и 3 слагаемое:	$\cos(2x)$ $-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0$	$\beta = 2$	$m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$m = 2$	2 группа

4) Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

Первое частное решение:  $\alpha = 0$   $\beta = 2$   $m = 1$

$$y_{\text{част1}} = x^S \cdot [(b_0 + b_1x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3x) \cdot \sin(2x)] \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 2 = 2i \rightarrow S = 1$$

Окончательно:  $y_{\text{част1}} = x \cdot [(b_0 + b_1x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3x) \cdot \sin(2x)]$

Второе частное решение:  $\alpha = 0$   $\beta = 0$   $m = 2$

$$y_{\text{част2}} = x^S \cdot (b_4 + b_5x + b_6x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \rightarrow S = 0$$

Окончательно:  $y_{\text{част2}} = b_4 + b_5x + b_6x^2$

6) Записываем структуру общего решения ЛНДУ:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част1}} + y_{\text{част2}}$$

Ответ:

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x \cdot [(b_0 + b_1x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3x) \cdot \sin(2x)] + b_4 + b_5x + b_6x^2$$



**Пример №9. Решить ЛНДУ методом подбора частного решения**

Дано:  $y'' + 4y = 4x^2 - x$

Решение:

1) Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

2) Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
2 слагаемое:	$-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

3) Группируем слагаемые с одинаковыми параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ :

1 и 2 слагаемое:	$4x^2$ $-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	1 группа
---------------------	----------------	--	----------

4) Для полученной группы слагаемых записываем частное решение:

Частное решение:  $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{\text{част}} = x^S \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \rightarrow S = 0$$

Окончательно:  $y_{\text{част}} = b_0 + b_1x + b_2x^2$

5) Находим неизвестные коэффициенты частного решения методом неопределенных коэффициентов:

$$y_{\text{част}} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

$$y'_{\text{част}} = b_1 + 2 \cdot b_2x$$

$$y''_{\text{част}} = 2 \cdot b_2$$

$$y''_{\text{част}} + 4y_{\text{част}} = 4x^2 - x$$

$$2 \cdot b_2 + 4 \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2) = 4x^2 - x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях уравнения:

$x^0$	$2 \cdot b_2 + 4 \cdot b_0 = 0$
$x$	$4 \cdot b_1 = -1$
$x^2$	$4 \cdot b_2 = 4$

Из полученной системы находим:

$$b_0 = -\frac{1}{2}$$

$$b_1 = -\frac{1}{4}$$

$$b_2 = 1$$

Окончательно:  $y_{\text{част}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2$

Проверка:

$$y_{\text{част}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2$$

$$y'_{\text{част}} = -\frac{1}{4} + 2 \cdot x$$

$$y''_{\text{част}} = 2$$

$$y''_{\text{част}} + 4y_{\text{част}} = 4x^2 - x$$

$$2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2\right) = 4x^2 - x$$

$$2 - 2 - x + 4x^2 = 4x^2 - x$$

$$\underline{4x^2 - x \equiv 4x^2 - x}$$

б) Записываем решение ЛНДУ:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част1}}$$

Ответ:  $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + x^2$