Решение примеров к лекции № 4

Пример №2. Решить ДУ высшего порядка

Дано: $(x^2+1)y''=2x\cdot y'$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим y.

Используем замены: $y'=z(x)$, тогда $y''=z'$.

Получим:

$(x^2+1)z'=2x\cdot z$ - ДУ 1-го порядка.

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$z'=\frac{2x}{x^2+1}\cdot z$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}\cdot z$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{2x}{x^2+1}dx \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=\ln(x^2+1)+\ln C_1 \quad\Rightarrow$$

$\underline{z=C_1(x^2+1)}$ - решение ДУ 1-го порядка

3. Сделаем обратную замену: $y'=C_1(x^2+1)$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1:

$C_1=0$	$C_1\neq 0$
$y'=0$ $\underline{y=C}$	$y'=C_1x^2+C_1$ $y=\int(C_1x^2+C_1)dx$ $\underline{y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2}$

4. Проанализируем полученные решения.

В результате получены два решения ДУ $y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$ и $y=C$, но при $C_1=0$ решение $y=C$ является частным случаем решения $y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$, поэтому выпишем только одно решение:

$\underline{y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2}$.

5. Потеряных решений нет (проверить самостоятельно).

6. Ответ: $\boxed{y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2}$

Пример №3. Решить ДУ высшего порядка

<u>Дано:</u> $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$

<u>Решение:</u>

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим x.

Используем замены: $y' = p(y)$, тогда $y'' = p' \cdot p$.

Получим:

$p^2 + 2y \cdot p' = 0$ - ДУ 1-го порядка.

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$p' = \frac{-1}{2y} \cdot p$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dy} = \frac{-1}{2y} \cdot p$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln\frac{1}{\sqrt{y}} + \ln C_1 \quad \Rightarrow$$

$\underline{p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}}$ - решение ДУ 1-го порядка

3. Сделаем обратную замену: $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1:

$C_1 = 0$	$C_1 \neq 0$
$y' = 0$ $\underline{y = C}$	$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx$ $\underline{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2}$

4. В результате получены два решения ДУ: $\underline{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2}$ и $\underline{y = C}$ и ни одно из них не является частным случаем другого.

5. Потеряных решений нет (проверить самостоятельно).

6. Ответ: $\boxed{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2, \quad y = C}$

Пример №4. Решить ДУ высшего порядка

Дано: $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка содержит x и y.

Проверяем на однородность: $x \cdot (ky) \cdot (ky'') - x \cdot (ky')^2 = ky \cdot ky'$ - каждое слагаемое в ДУ содержит k^2, сократив на которое ($k \neq 0$), получим исходное ДУ.

Используем замены: $y' = z(x) \cdot y$, тогда $y'' = z' \cdot y + z^2 \cdot y$

Получим:

$$x \cdot y \cdot (z' \cdot y + z^2 \cdot y) - x \cdot (z \cdot y)^2 = y \cdot z \cdot y$$

$$x \cdot z' \cdot y^2 + x \cdot z^2 \cdot y^2 - x \cdot z^2 \cdot y^2 = y^2 \cdot z$$

$$x \cdot z' + x \cdot z^2 - x \cdot z^2 = z$$

$x \cdot z' = z$ - ДУ 1-го порядка

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$z' = \frac{1}{x} \cdot z$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z$$

$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{z = C_1 x}$ - решение ДУ 1-го порядка

3. Сделаем обратную замену: $\frac{y'}{y} = C_1 x \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 x \cdot y$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1:

$C_1 = 0$	$C_1 \neq 0$
$y' = 0$ $\underline{y = C}$	$y' = C_1 x \cdot y$ $\frac{dy}{dx} = C_1 x \cdot y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int C_1 x dx$ $\underline{\ln\lvert y\rvert = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2}$

4. В результате получены два решения ДУ: $\underline{\ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2}$ и $\underline{y = C}$ и ни одно из них не является частным случаем другого.

5. Потеряных решений нет (проверить самостоятельно).

6. Ответ: $\boxed{\ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2, \quad y = C}$

Пример №5. Решить задачу Коши для ДУ 2-го порядка

Дано: $(x^2+1)y''=2x\cdot y'$

$y(1)=1$

$y'(1)=2$

Решение:

1. Решаем ДУ (см. пример №2).

Общее решение ДУ имеет вид: $y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$

2. Дифференцируем общее решение один раз:

$$y'=C_1x^2+C_1$$

3. Записываем вместе общее решение и найденную производную:

$$y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$$

$$y'=C_1x^2+C_1$$

4. Подставляем заданные начальные условия в выписанные функции:

Условие $y(1)=1$ означает, что при $x=1$ функция $y=1$, значит $1=C_1\frac{1^3}{3}+C_1\cdot 1+C_2$

Условие $y'(1)=2$ означает, что при $x=1$ функция $y'=2$, значит $2=C_1\cdot 1^2+C_1$

Получили: $\begin{cases}1=\frac{1}{3}C_1+C_1+C_2\\ 2=C_1+C_1\end{cases}$

5. Решаем систему:

$$\begin{cases}1=\frac{1}{3}C_1+C_1+C_2\\ 2=C_1+C_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1=\frac{4}{3}C_1+C_2\\ 2=2C_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=1\\ C_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

6. Подставим найденные значения в общее решение: $y=1\cdot\frac{x^3}{3}+1\cdot x-\frac{1}{3}$ - решение задачи Коши

Ответ: $\boxed{y=\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{3}}$