Решение примеров к лекциям № 2 и №3

Пример №1. Решить ДУ с разделяющимися переменными

Дано: $x \cdot y + (x+1)y' = 0$

Решение:

1. Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \dfrac{-x \cdot y}{x+1}$

В правой части ДУ можно выделить два множителя, один представляет функцию аргумента x, другой аргумента y:

$$y' = \underbrace{\frac{-x}{x+1}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{y}_{\psi(y)}$$ - это ДУ с разделяющимися переменными в виде *

2. Сделаем замену: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{x+1} \cdot y$

3. Разделим переменные: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-x}{x+1} \cdot dx$

4. Проинтегрируем левую часть уравнения по y, правую по x:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-x}{x+1} \cdot dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int \frac{x+1}{x+1} \cdot dx - \int \frac{-1}{x+1} \cdot dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int 1 \cdot dx + \int \frac{1}{x+1} \cdot d(x+1)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C}$$ - решение ДУ

Преобразуем полученное решение:

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\ln|y|} = e^{-x + \ln|x+1| + \ln C} \qquad \Rightarrow \qquad y = e^{-x} \cdot e^{\ln|x+1|} \cdot e^{\ln C}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y = e^{-x} \cdot (x+1) \cdot C}$$ - решение ДУ

5. Проанализируем возможно потерянные решения. Для этого выпишем все выражения, на которые осуществлялось деление в процессе решения, приравняем их нулю и проверим соответствующие функции подстановкой в исходное ДУ:

а) $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$. Проверим функцию $x = -1$, подставляем ее в ДУ:

$$-1 \cdot y + (-1+1)y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -y + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -y = 0$$

В полученном выражении левая часть не равна правой (не тождество), значит $x = -1$ - не решение ДУ.

б) $y = 0$. Проверим функцию $y = 0$, подставляем ее в ДУ:

$$x \cdot 0 + (x+1) \cdot 0' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0$$

Получили: левая часть равна правой (тождество), значит $y = 0$ - решение ДУ, но это решение входит в ранее найденное как частный случай при $C = 0$

6. Ответ: $\boxed{y = e^{-x} \cdot (x+1) \cdot C}$

Пример №2. Решить ДУ с разделяющимися переменными

Дано: $\sqrt{y^2+1}\cdot dx = x\cdot y\cdot dy$

Решение:

1. Используя формулу $y' = \dfrac{dy}{dx}$, выделим в ДУ старшую производную: $\sqrt{y^2+1} = x\cdot y\cdot y'$.

Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x\cdot y}$

В правой части ДУ можно выделить два множителя, один представляет функцию аргумента x, другой аргумента y:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}}_{\psi(y)}$$ - это ДУ с разделяющимися переменными в виде *

2. Сделаем замену: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$

3. Разделим переменные: $\dfrac{y\cdot dy}{\sqrt{y^2+1}} = \dfrac{1}{x}dx$

4. Проинтегрируем левую часть уравнения по y, правую по x:

$$\int\frac{y\cdot dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int\frac{1}{x}dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C}$$ - решение ДУ

5. Проанализируем возможно потерянные решения. Для этого выпишем все выражения, на которые осуществлялось деление в процессе решения, приравняем их нулю и проверим соответствующие функции подстановкой в исходное ДУ:

а) $x = 0$. Проверим функцию $x = 0$, подставляем ее в ДУ:

$$\sqrt{y^2+1}\cdot d0 = 0\cdot y\cdot dy \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0$$

В полученном выражении левая часть равна правой (тождество), значит $\boxed{x = 0}$ - решение ДУ и это решение не входит в найденное ни при каком значении произвольной постоянной.

б) $y = 0$. Проверим функцию $y = 0$, подставляем ее в ДУ:

$$\sqrt{0^2+1}\cdot dx = x\cdot 0\cdot d0 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 0 \;\Rightarrow\qquad 0 = 0$$

Получили: левая часть не равна правой (не тождество), значит $y = 0$ - не решение ДУ.

в) $\sqrt{y^2+1} = 0$ не имеет смысл ни при каких действительных значениях y, здесь нет решений.

6. Ответ: $\boxed{\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C, \quad x = 0}$

Пример №3. Решить однородное ДУ 1-го порядка

Дано: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\ln y - \ln x}{x}$

Решение:

1. Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \dfrac{y}{x} \cdot (\ln y - \ln x)$

Правая часть полученного уравнения представляет собой функцию аргумента $\dfrac{y}{x}$:

$$y' = \underbrace{\frac{y}{x} \cdot \ln\frac{y}{x}}_{f(\frac{y}{x})}$$ - это однородное ДУ 1-го порядка

2. Сделаем замену: $z = \dfrac{y}{x}, \quad y' = z' \cdot x + z$

3. Получим:

$$z' \cdot x + z = z \cdot \ln z$$

$$z' = \frac{1}{x} \cdot (z \cdot \ln z - z)$$ - ДУ с разделяющимися переменными

4. Решаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot (z \cdot \ln z - z)$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \ln|x|$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| \cdot C$$

$$\ln z - 1 = C \cdot x$$

$$\underline{\ln z = C \cdot x + 1}$$ - решение ДУ с разделяющимися переменными

5. Сделаем обратную подстановку:

$$\boxed{\ln\frac{y}{x} = C \cdot x + 1}$$ - решение однородного ДУ

6. Потерянных решений нет (проверить самостоятельно!).

7. Ответ: $\boxed{\ln\dfrac{y}{x} = C \cdot x + 1}$

Пример №4. Решить линейное ДУ 1-го порядка методом вариации произвольной постоянной

<u>Дано:</u> $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

<u>Решение:</u>

1. Выразим старшую производную: $y' = 2\frac{y}{x} + 2x^3$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x,y) = a(x) \cdot y + b(x)$, где $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = 2x^3$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка.

2. Запишем соответствующее линейное однородное ДУ (ЛОДУ): $y' = 2\frac{y}{x}$ - это ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

3. Решаем ЛОДУ:

$$y' = 2\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \underline{y = C \cdot x^2}$$ - решение ЛОДУ

4. Заменим произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$y = C(x) \cdot x^2$$

5. Найдем производную найденного решения: $y' = C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x$

Подставим найденные выражения в ДУ из п.1:

$$\underbrace{C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x}_{y'} = \frac{2}{x} \cdot \underbrace{C(x) \cdot x^2}_{y} + 2x^3$$

$$C'(x) \cdot x^2 + \underline{\underline{2x \cdot C(x)}} = \underline{\underline{2x \cdot C(x)}} + 2x^3$$

$$C'(x) \cdot x^2 = 2x^3$$

> ***Замечание!*** Если все сделано правильно, то при подстановке из ДУ исчезает $C(x)$!

$$C'(x) = 2x$$

6. Найдем функцию $C(x)$: $C(x) = \int 2x\, dx = x^2 + \hat{C}$

7. Подставим найденное выражение в решение из п.4: $\boxed{y = (x^2 + \hat{C}) \cdot x^2}$ - решение линейного ДУ.

8. Потерянных решений нет (проверить самостоятельно).

9. Ответ: $\boxed{y = (x^2 + C) \cdot x^2}$

Пример №5. Решить линейное ДУ 1-го порядка методом вариации произвольной постоянной

Дано: $y \cdot dx = (x + y^2)dy$
Решение:

1. Выделим в ДУ производную y': $y = (x + y^2)y'$

Выразим старшую производную: $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$ - это ДУ не является линейным.

Преобразуем ДУ: $\dfrac{1}{y'} = \dfrac{1}{\dfrac{y}{x + y^2}} \quad \Rightarrow \quad x' = \dfrac{x + y^2}{y} \quad \Rightarrow \quad x' = \dfrac{1}{y} \cdot x + y$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(y) \cdot x + b(y)$, где $a(y) = \dfrac{1}{y}$, $b(y) = y$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка относительно функции $x(y)$.

2. Запишем соответствующее линейное однородное ДУ (ЛОДУ): $x' = \dfrac{x}{y}$ - это ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

3. Решаем ЛОДУ:

$$x' = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \underline{x = C \cdot y}$$ - решение ЛОДУ

4. Заменим произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$x = C(y) \cdot y$$

5. Найдем производную найденного решения: $x' = C'(y) \cdot y + C(y)$
Подставим найденные выражения в ДУ из п.1:

$$\underbrace{C'(y) \cdot y + C(y)}_{x'} = \frac{1}{y} \cdot \underbrace{C(y) \cdot y}_{x} + y$$

$$C'(y) \cdot y + \underline{\underline{C(y)}} = \underline{\underline{C(y)}} + y$$

$$C'(y) \cdot y = y$$

> ***Замечание!*** Если все сделано правильно, то при подстановке из ДУ исчезает $C(y)$!

$$C'(y) = 1$$

6. Найдем функцию $C(y)$: $C(y) = \int 1 \cdot dy = y + \hat{C}$

7. Подставим найденное выражение в решение из п.4: $\boxed{x = (y + \hat{C}) \cdot y}$ - решение линейного ДУ.

8. $\boxed{y = 0}$ является решением (проверить самостоятельно).

9. Ответ: $\boxed{x = (y + C) \cdot y, \quad y = 0}$

Пример №6. Решить линейное ДУ 1-го порядка методом подстановки

Дано: $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

Решение:

1. Выразим старшую производную: $y' = 2\dfrac{y}{x} + 2x^3$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$, где $a(x) = \dfrac{2}{x}$, $b(x) = 2x^3$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка.

2. Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Получим:
$$u' \cdot v + u \cdot v' = \frac{2}{x} \cdot u \cdot v + 2x^3$$
$$u' \cdot v + u \cdot \left[v' - \frac{2}{x} \cdot v \right] = 2x^3$$

3. Найдем функцию v, такую что $v' - \dfrac{2}{x} \cdot v = 0$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} \cdot v$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{x} \cdot dx$$
$$\ln|v| = 2\ln|x|$$
$$v = x^2$$

4. Подставим найденную функцию в уравнение:
$$u' \cdot x^2 + u \cdot [0] = 2x^3$$
$$u' = 2x$$

5. Найдем: $u = \int 2x \cdot dx = x^2 + C$

6. Запишем решение линейного ДУ: $\boxed{y = (x^2 + C) \cdot x^2}$

7. Потерянных решений нет (проверить самостоятельно).

8. Ответ: $\boxed{y = (x^2 + C) \cdot x^2}$

Пример №7. Решить ДУ Бернулли

<u>Дано:</u> $y' = y^4 \cdot \cos(x) + y \cdot \mathrm{tg}(x)$
<u>Решение:</u>

1. Выразим старшую производную: $y' = y \cdot \mathrm{tg}(x) + \cos(x) \cdot y^4$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^n$, где $a(x) = \mathrm{tg}(x)$, $b(x) = \cos(x)$, $n = 4$, значит данное ДУ является ДУ Бернулли.

2. Разделим обе части ДУ на y^4: $\dfrac{y'}{y^4} = \dfrac{1}{y^3} \cdot \mathrm{tg}(x) + \cos(x)$

3. Сделаем замену: $z = \dfrac{1}{y^{4-1}} = y^{-3} \quad \Rightarrow \quad z' = -3 \cdot y^{-4} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{3} \cdot z' \cdot y^4$

4. Подставим полученные выражения в ДУ из п.2:

$$\frac{-1}{3} \cdot \frac{z' \cdot y^4}{y^4} = y^{-3} \cdot \mathrm{tg}(x) + \cos(x)$$

$\underline{z' = -3\mathrm{tg}(x) \cdot z - 3\cos(x)}$ - это ЛДУ 1-го порядка

5. Решаем ЛДУ методом вариации произвольной постоянной:

$$z' = -3\mathrm{tg}(x) \cdot z$$

$$\frac{dz}{dx} = -3\mathrm{tg}(x) \cdot z$$

$$\int \frac{dz}{z} = -3\int \mathrm{tg}(x) \cdot dx$$

$$\ln|z| = 3\ln|\cos(x)| + \ln C$$

$$z = C \cdot \cos^3(x)$$

$$z = C(x) \cdot \cos^3(x)$$

$$C'(x) \cdot \cos^3(x) + C(x) \cdot 3\cos^2(x) \cdot (-\sin(x)) = -3\mathrm{tg}(x) \cdot C(x) \cdot \cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$C'(x) \cdot \cos^3(x) = -3\cos(x)$$

$$C'(x) = -3\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$C(x) = -3\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = -3\mathrm{tg}(x) + \hat{C}$$

$\underline{z = (-3\mathrm{tg}(x) + C)) \cdot \cos^3(x)}$ - решение ЛДУ

6. Делаем обратную замену: $\boxed{y^{-3} = (-3\mathrm{tg}(x) + C) \cdot \cos^3(x)}$ - решение ДУ Бернулли

7. $\boxed{y = 0}$ - потерянное решение ДУ (проверить самостоятельно).

8. Ответ: $\boxed{y^{-3} = (-3\mathrm{tg}(x) + C) \cdot \cos^3(x), \quad y = 0}$

Пример №8. Решить ДУ в полных дифференциалах

Дано: $2x \cdot y \cdot dx = (y^2 - x^2)dy$

Решение:

1. Запишем ДУ в виде $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$: $\underbrace{2x \cdot y}_{M(x,y)} \cdot dx + \underbrace{(-y^2 + x^2)}_{N(x,y)}dy = 0$

Найдем: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x$ и $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$. Получили $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, значит ДУ в полных дифференциалах.

2. Будем искать решение в виде $F(x,y) = C$, где $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

3. Найдем $F(x,y)$ из условия $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$:

$$F(x,y) = \int 2x \cdot y \cdot dx = 2y\int x \cdot dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$F(x,y) = y \cdot x^2 + C(y)$$

4. Продифференцируем полученное выражение по y: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 + C'(y)$ и приравняем $N(x,y)$, получим:

$$x^2 + C'(y) = -y^2 + x^2$$

$$C'(y) = -y^2$$

5. Найдем $C(y) = \int -y^2 dy = \frac{-y^3}{3}$ (Константу интегрирования не пишем!)

6. Запишем искомую функцию: $F(x,y) = y \cdot x^2 - \frac{y^3}{3}$

7. Ответ: $\boxed{y \cdot x^2 - \frac{y^3}{3} = C}$ - решение ДУ в полных дифференциалах.

Пример №9. Решить ДУ неразрешенное относительно производной

Дано: $y = \ln(1+(y')^2)$

Решение:

1. Данное ДУ неразрешено относительно y', но разрешено относительно y:

$$y = \ln(1+(y')^2)$$

2. Введем параметр $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим: $y = \ln(1+p^2)$

3. Возьмем полный дифференциал левой и правой части уравнения:

$$dy = \frac{1}{1+p^2}\cdot 2p\cdot dp$$

4. Сделаем замену $dy = pdx$, получим:

$$pdx = \frac{1}{1+p^2}\cdot 2p\cdot dp$$

$dx = \dfrac{2}{1+p^2}dp$ - получили ДУ с разделяющимися переменными

5. Решаем ДУ:

$$\int dx = \int \frac{2}{1+p^2}dp$$

$x = 2\cdot \mathrm{arctg}(p) + C$ - решение ДУ с разделяющимися переменными

6. Запишем решение исходного ДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2\cdot \mathrm{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1+p^2) \end{cases}$$

7. Проверяем возможно потерянные решения: $p = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(1+0^2) = \ln 1 = 0$

Подставляем $y = 0$ в исходное ДУ: $0 = \ln(1+(0')^2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

В полученном выражении левая часть равна правой (тождество), значит $\boxed{y = 0}$ - решение ДУ.

8. Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = 2\mathrm{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1+p^2) \end{cases}, \qquad y = 0}$

Пример №10. Решить ДУ неразрешенное относительно производной

Дано: $y' \cdot (x - \ln y') = 1$

Решение:

1. Данное ДУ неразрешено относительно y', но разрешено относительно x:

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'$$

2. Введем параметр $p = y' = \frac{dy}{dx}$, получим: $x = \frac{1}{p} + \ln p$

3. Возьмем полный дифференциал левой и правой части уравнения:

$$dx = (-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p})dp$$

4. Сделаем замену $dx = \frac{dy}{p}$, получим:

$$\frac{dy}{p} = (-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p})dp$$

$$dy = (-\frac{1}{p} + 1)dp$$ - получили ДУ с разделяющимися переменными

5. Решаем ДУ:

$$\int dy = \int (-\frac{1}{p} + 1)dp$$

$$\underline{y = -\ln|p| + p + C}$$ - решение ДУ с разделяющимися переменными

6. Запишем решение исходного ДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}$$

7. Проверяем возможно потерянные решения: $p = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{0} + \ln 0$ - невозможно, следовательно потерянных решений нет.

8. Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}}$