Тема 7. Задачи группового выбора.

На практике часто встречаются ситуации, когда имеются несколько ЛПР, каждое из которых имеет свои предпочтения на одном и том же множестве A сравниваемых вариантов, и на основе этих индивидуальных предпочтений необходимо выработать групповое (коллективное) предпочтение.

Например, жюри необходимо распределить места между участниками соревнования, гражданам страны нужно избрать президента и т.п.

Такие задачи принятия решений называются задачами *группового выбора*, участвующие в них ЛПР называются *выборщиками*, а сравниваемые варианты – *кандидатами*. В каждой такой задаче будем произвольным образом нумеровать выборщиков числами от 1 до m, а кандидатов обозначать буквами a,b,… и т.д.

Процесс построения группового предпочтения называется *процедурой голосования*, а правила, с помощью которых он производится, называются *правилами голосования* или *принципом согласования*.

Как мы знаем, предпочтения могут задаваться различными способами, например, в виде бинарных отношений предпочтения или с помощью функций выбора.

В зависимости от того, каким образом заданы индивидуальные предпочтения и в какой форме требуется построить групповое предпочтение, выделяют различные типы задач группового выбора и соответствующие им типы процедур голосования. Рассмотрим из них следующие три типа:

1) задан набор $<R_1,\ldots,R_m>$ отношений индивидуального предпочтения (т.н. *профиль индивидуальных предпочтений*), групповое предпочтение также требуется построить в виде бинарного отношения R (или соответствующего ему строгого отношения предпочтения P) на множестве кандидатов, таким образом, $R = F(R_1,\ldots,R_m)$ – процедура голосования типа У-У (*«упорядочение – упорядочение»*);
2) задан профиль индивидуальных предпочтений $<R_1,\ldots,R_m>$, а групповое предпочтение требуется построить в виде выбора $C(A) = F(R_1,\ldots,R_m)$ – процедура голосования типа У-В (*«упорядочение – выбор»*);

3) для каждого i-го выборщика задан $C_i(A)$ – его выбор из множества кандидатов A, необходимо построить групповой выбор $C(A) = F(C_1(A),\dots,C_m(A))$ – процедура голосования типа В-В (*«выбор – выбор»*).

Рассмотрим процедуры голосования типа У-У. Будем считать, что R_i являются отношениями строгого порядка.

Могут применяться следующие принципы согласования:

– *навязанный принцип согласования* (независимо от того, каким бы ни был задан профиль индивидуальных предпочтений, формируется одно и то же отношение группового предпочтения);

– *диктаторский принцип согласования* ($R = R_j$, т.е. групповое предпочтение формируется из предпочтения одного j-го выборщика, независимо от предпочтений R_i, $i \neq j$ остальных выборщиков);

– *правило простого большинства*: пусть m(a,b) – число выборщиков, для которых a предпочтительнее, чем b; m(b,a) – количество выборщиков, для которых b предпочтительнее, чем a; отношение группового предпочтения задается так: $a\ R\ b \Leftrightarrow m(a,b) \geq m(b,a)$;

– *правило тотально мажоритарного большинства*: $a\ P\ b \Leftrightarrow m(a,b) \geq t$, где $t > m/2$.

Пример 1.

Навязанный принцип согласования: нечестные выборы президента, когда заранее известен результат выборов, независимо от фактического распределения голосов избирателей.

Диктаторский принцип согласования: «мы посовещались и я решил» – принцип принятия решений И.В. Сталина.

Правило простого большинства: обычно применяется при принятии законов Государственной Думой.

Правило тотально мажоритарного большинства: ст.105 п.5 Конституции РФ: "...федеральный закон считается принятым, если при повторном голосовании за него проголосовало не менее двух третей от общего числа депутатов Государственной Думы" (t=2/3).

Пример 2.

Множество кандидатов A = {a,b}, выборщиков двое.

Возможны три предпочтения, задающие частичный порядок на A:

$R^{(1)} = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle\}$

$R^{(2)} = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

$R^{(3)} = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

Рассмотрим возможные профили индивидуального предпочтения и групповые предпочтения, полученные по различным правилам:

R_1	R_2	НПС	ДПС по R_2	ППБ
$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$
$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(3)}$
$R^{(1)}$	$R^{(3)}$	$R^{(1)}$	$R^{(3)}$	$R^{(3)}$
$R^{(2)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(3)}$
$R^{(2)}$	$R^{(2)}$	$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(2)}$
$R^{(2)}$	$R^{(3)}$	$R^{(1)}$	$R^{(3)}$	$R^{(3)}$
$R^{(3)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(3)}$
$R^{(3)}$	$R^{(2)}$	$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(3)}$
$R^{(3)}$	$R^{(3)}$	$R^{(1)}$	$R^{(3)}$	$R^{(3)}$

Замечание 1. Отношения, полученные по правилам большинства, могут не быть транзитивными.

Замечание 2. Правило тотально-мажоритарного большинства может быть построено аксиоматически; это единственный тип правила, которое удовлетворяет следующим требованиям (*аксиомам Мея*):

– *однозначность* (при любом профиле $\langle R_1,\ldots,R_m\rangle$ правило F определено однозначно);

– *анонимность* (групповое решение не зависит от нумерования выборщиков);

– *нейтральность* (групповое решение не зависит от именования кандидатов);

– *положительная реакция* (если для некоторого профиля $\langle R_1,\ldots,R_m\rangle$ принцип согласования указывает, что a R b и если затем j-й выборщик меняет свое предпочтение в пользу кандидата a, тогда как все остальные выборщики сохраняют свои предпочтения, то при новом профиле в групповом решении будет a P b, т.е. предпочтение станет строгим).

Процедуры голосования типов В-В и У-В

Правило относительного большинства: каждый выборщик отдает свой голос наиболее предпочтительному для себя кандидату, избирается кандидат a, получивший наибольшее число голосов f(a).

Замечание: по правилу относительного большинства может победить кандидат, который является наименее предпочтительным для большинства выборщиков.

Правило Борда́: каждый выборщик в соответствии со своими предпочтениями формирует отношение линейного порядка на множестве всех p кандидатов, на основе которого производится ранжирование следующим образом: наименее предпочтительный кандидат получает 0 очков, следующий по предпочтительности кандидат получает 1 очко и т.д., наиболее предпочтительный кандидат получает p – 1 очков; побеждает кандидат с наибольшей суммой очков по всем выборщикам (*победитель по Борда́*).

Правило голосования с подсчетом очков (обобщение правила Борда́): аналогично правилу Борда́ каждый выборщик производит ранжирование, ранги кандидатам выставляются из фиксированной неубывающей последовательности чисел: $s_0 \le s_1 \le \ldots \le s_{p-1}$, наименее предпочтительный кандидат получает s_0 очков, следующий по предпочтительности кандидат получает s_1 очков и т.д., наиболее предпочтительный кандидат получает s_{p-1} очков, побеждает кандидат с наибольшей суммой очков по всем выборщикам.

Замечание: правило относительного большинства тоже является частным случаем правила с подсчетом очков (при $s_0 = s_1 = \ldots = s_{p-2} < s_{p-1}$).

Правило Кондорсе: если во множестве кандидатов, на котором построено групповое отношение предпочтения по принципу простого большинства, существует наибольший элемент, то он является *победителем по Кондорсе*.

Состоятельным по Кондорсе правилом называется такое правило, которое выбирает победителя по Кондорсе, если он существует.

Теорема: существуют профили индивидуальных предпочтений, при которых победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком способе подсчета очков (т.е. правило с подсчетом очков не является состоятельным по Кондорсе).

Состоятельными по Кондорсе являются следующие два правила.

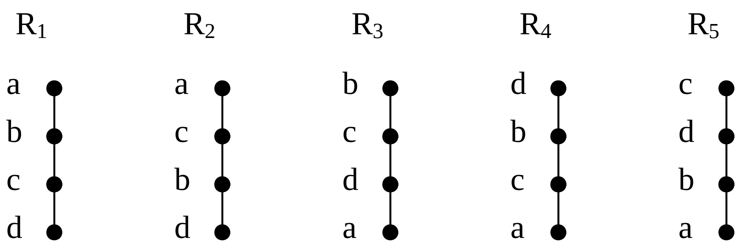
Правило Копленда: на множестве кандидатов строится групповое предпочтение R по принципу простого большинства, затем каждому кандидату a выставляется оценка следующим образом: f(a) = (число пар $<a,x> \in R$ минус число пар $<x,a> \in R$, $x \neq a$), побеждает кандидат с наибольшей оценкой (*победитель по Копленду*).

Правило Симпсона: каждому кандидату a выставляется оценка $f(a) = \min m(a,x)$ по всем x, где m(a,x) – число выборщиков, для которых a предпочтительнее, чем x; побеждает кандидат с наибольшей оценкой (*победитель по Симпсону*).

Пример 3:

В выборах участвуют 5 выборщиков и 4 кандидата: A={a, b, c, d}.

Пусть каждый выборщик в соответствии со своими предпочтениями задал отношение линейного порядка на множестве кандидатов. Профиль индивидуальных предпочтений выглядит так:



Построим групповое отношение предпочтения по правилу простого большинства.

$m(a,b)=2$, $m(b,a)=3$, $m(b,a)>m(a,b) \Rightarrow <b,a> \in R$

$m(a,c)=2$, $m(c,a)=3$, $m(c,a)>m(a,c) \Rightarrow <c,a> \in R$

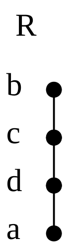
$m(a,d)=2$, $m(d,a)=3$, $m(d,a)>m(a,d) \Rightarrow <d,a> \in R$

$m(b,c)=3$, $m(c,b)=2$, $m(b,c)>m(c,b) \Rightarrow <b,c> \in R$

$m(b,d)=3$, $m(d,b)=2$, $m(b,d)>m(d,b) \Rightarrow <b,d> \in R$

$m(c,d)=4$, $m(d,c)=1$, $m(c,d)>m(d,c) \Rightarrow <c,d> \in R$

Таким образом, R также является отношением линейного порядка:



Результаты голосования в зависимости от применяемого правила:

Правило	Относит. больш.	Борда	Кондорсе	Копленда	Симпсона
Подсчет	f(a)=2 f(b)=1 f(c)=1 f(d)=1	f(a)=3+3+0+0+0=6 f(b)=2+1+3+2+1=9 f(c)=1+2+2+1+3=9 f(d)=0+0+1+3+2=6	$\forall x \in A$ <b,x> $\in R$, следовательно, b – наибольший элемент в A	f(a)=0–3=–3 f(b)=3–0=3 f(c)=2–1=1 f(d)=1–2=–1	f(a)=min{2,2,2}=2 f(b)=min{3,3,3}=3 f(c)=min{3,4,2}=2 f(d)=min{3,2,1}=1
Победители	a	b и c	b	b	b

$\forall x \in A$ $\langle x,a \rangle \in R_i$, при i=3,4,5. Следовательно, a – наименьший элемент в A (наихудший) для 3-го, 4-го и 5-го выборщиков, т.е. для большинства выборщиков.

Нормативные свойства правил голосования

Оптимальность по Парето: если кандидат a для всех выборщиков предпочтительнее, чем кандидат b, то b не может быть избран.

Анонимность: имена выборщиков не имеют значения, т.е. если два выборщика поменяются своими предпочтениями, результат выборов не изменится.

Нейтральность: имена кандидатов не имеют значения, в том смысле, что при переименовании a на b и b на a, если победителем был a, то победит b, если победителем был какой-то другой x, то он и останется победителем.

Монотонность: если a – победитель при данном профиле и профиль изменить таким образом, что положение a улучшится, а попарное сравнение любых других кандидатов для любого выборщика не изменится, то a по-прежнему будет выбран при новом профиле.

Замечание: правила с подсчетом очков, правила Кондорсе, Копленда и Симпсона обладают вышеперечисленными свойствами.

Аксиома пополнения: если две непересекающиеся группы N_1 и N_2 выборщиков выбирают одного и того же кандидата a из одного и того же множества A кандидатов, тогда объединенная группа выборщиков $N_1 \cup N_2$ также выберет кандидата a.

Теорема: все правила с подсчетом очков удовлетворяют аксиоме пополнения; не существует состоятельного по Кондорсе правила, которое удовлетворяло бы аксиоме пополнения.

Аксиома участия: если кандидат a выбирается из множества A кандидатов выборщиками из множества N, то объединение $N \cup i$ (выборщик $i \notin N$) выберет a, либо кандидата, который для i более предпочтителен, чем a.

Теорема: все правила с подсчетом очков удовлетворяют аксиоме пополнения; если A состоит хотя бы из 4-х кандидатов, то ни одно состоятельное по Кондорсе правило не удовлетворяет аксиоме пополнения.

Манипулируемость принципов согласования

Пример 4:

Пусть в примере 3 голосование проводится по правилу относительного большинства, в таком случае побеждает кандидат a, который наименее предпочтителен для 4-го и 5-го выборщиков.

Однако, если 4-й и 5-й выборщики знают предпочтения остальных выборщиков, то они могут исказить информацию о своих предпочтениях так, чтобы повлиять на исход выборов в лучшую для себя сторону. А именно, если они отдадут свои голоса не за кандидатов d и c, которые для них наиболее предпочтительны, а за кандидата b, который по крайней мере предпочтительнее для них, чем кандидат a, то будет избран b.

Принципы согласования, допускающие манипулирование такого рода, называются *манипулируемыми*.