Тема 5. Принятие решений в условиях риска.

Рассмотрим случай, когда в модели проблемной ситуации имеются случайные факторы $\lambda \in \Lambda$ с известными законами распределения вероятностей.

В таких задачах связь между реализацией определенной стратегии $s \in S$ и наступлением некоторого исхода $g \in G$ неоднозначна: в зависимости от значения параметра λ, может наступить тот или иной исход, т.о. $g=\psi(s,\lambda)$.

Пусть $G = \{g_1,\ldots,g_n\}$ – множество исходов, $p_i(s)$ – вероятность исхода g_i при использовании стратегии $s \in S$.

Пусть исходы оцениваются по единственному критерию $K(g)$ (предполагаем, что чем больше $K(g)$, тем лучше), тогда $K'(s)=K(\psi(s,\lambda))$ – значение критерия при выборе стратегии s – является случайной величиной с законом распределения вероятностей: $F(x,s) = P(K'(s)<x)$.

Теоретически мы можем построить R′ – *отношение стохастического доминирования*: $R' = \{ <s,t> \mid F(x,s) \le F(x,t)\ \forall x)$. Таким образом, $sR't \Leftrightarrow \forall x\ [\ P(K'(s)<x) \le P(K'(t)<x)]$, т.е. стратегия s доминирует над стратегией t, если вероятность P того, что значение критерия K′ при её выборе будет меньше некоторого произвольно заданного числа x, не превосходит такой вероятности в случае выбора t.

По R′ можно построить P′ – отношение *строгого стохастического доминирования* и I′ – отношение *стохастического безразличия*, а дальше задача будет сводиться к нахождению множества S* максимальных по P′ стратегий – т.н. *недоминируемых стратегий*.

Однако, на практике отношение R′ (и тем более P′) содержит, как правило, очень малое число пар, поэтому такой принцип оптимальности будет очень слабым (будет давать мало или вообще 0 вариантов).

Поэтому применяют другие принципы оптимальности, основанные на преобразовании K′(s) в числовую функцию (методами математической статистики), с помощью которой все стратегии сравниваются по предпочтительности и из них выбирается оптимальная. Например:

1) принцип *гарантированного результата* (выбираем стратегии, дающие наилучшие значения K′ при наихудшем λ);

2) принцип *среднего результата* (выбираем стратегии, которые, в среднем, дают лучшее значение K′): $M[K'(s)] \to \max$;

3) принцип *кучности результата* (выбираем стратегии, при которых дисперсия значений K′ при разных λ минимальна): $D[K'(s)] \to \min$.

На практике закон распределения K′(s) и его характеристики ($M[K'(s)]$ – математическое ожидание и $D[K'(s)]$ – дисперсия) определяются опытным путем (методом статистических испытаний).

Существуют и другие методы принятия решений в условиях риска. Они основаны на построении функции полезности по фон Нейману и Моргенштерну.

Отношение ЛПР к риску и ожидаемая полезность

При наличии случайных факторов в задаче принятия решений необходимо учитывать не только предпочтения ЛПР по отношению к различным исходам, но и его отношение (склонность) к риску.

Фактически, решение поставленной нами исходной задачи принятия решений в условиях риска, сводится к выбору среди набора альтернативных *лотерей* l, в которых различные исходы $g_1,\dots,g_n$, называемые *выигрышами*, наступают с соответствующими вероятностями $p_1^l,\dots,p_n^l$, причем $p_1^l+\dots+p_n^l = 1$.

Пример 1:

У ЛПР имеется возможность принять участие в одной из двух лотерей: l_1, участвуя в которой, он выиграет 200 р. с вероятностью 0.9 или проиграет 800 р. с вероятностью 0.1; и l_2, участвуя в которой, с вероятностью 0.9 он ничего не выиграет и не проиграет, а с вероятностью 0.1 выиграет 1000 р. В какой из них ему выгоднее участвовать?

Итак, $g_{11} = 200$, $p_1(g_{11}) = 0.9$, $g_{12} = -800$, $p_1(g_{12}) = 0.1$ – в лотерее l_1, $g_{21} = 0$, $p_2(g_{21}) = 0.9$, $g_{22} = 1000$, $p_2(g_{22}) = 0.1$.

$m_1 = p_1(g_{11})\cdot g_{11}+p_1(g_{12})\cdot g_{12} = 200\cdot 0.9 + (-800)\cdot 0.1 = 100.$

$m_2 = p_2(g_{21})\cdot g_{21}+p_2(g_{22})\cdot g_{22} = 0\cdot 0.9 + 1000\cdot 0.1 = 100.$

Таким образом, математические ожидания выигрышей (средние величины) $m_1 = m_2$, т.е. эти лотереи одинаковы по принципу среднего результата.

$\Delta_1 = |g_{12} - g_{11}| = |-800-200| = 1000$, $\Delta_2 = |g_{22} - g_{21}| = |1000-0| = 1000$, т.е. разброс выигрышей в этих лотереях одинаковый.

$D_1 = (g_{11} - m_1)^2 \cdot p_1(g_{11}) + (g_{12} - m_1)^2 \cdot p_1(g_{12}) = (200-100)^2 \cdot 0.9 + (-800-100)^2 \cdot 0.1 = 90000$, $D_2 = (g_{21} - m_2)^2 \cdot p_2(g_{21}) + (g_{22} - m_2)^2 \cdot p_2(g_{22}) = (0-100)^2 \cdot 0.9 + (1000-100)^2 \cdot 0.1 = 90000$, таким образом, дисперсии совпадают, т.е. эти лотереи одинаковы и по принципу кучности.

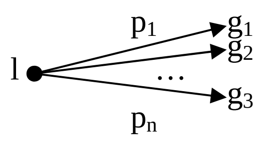
Однако по содержательному смыслу эти лотереи совершенно различны: лотерея l_2 беспроигрышная, но выигрывают в ней редко, зато приличную сумму, а в лотерее l_1 ЛПР скорее всего выиграет небольшую сумму, но можете и програть, причем не мало. Таким образом, на первый план встает задача выявления *склонности ЛПР к риску*.

По фон Нейману и Моргенштерну, при выполнении некоторых достаточно общих условий существует функция полезности $f:G \rightarrow \mathcal{R}$ такая, что: $\xi R \eta \Leftrightarrow M_\xi[f(\cdot)] \geq M_\eta[f(\cdot)]$, где R – отношение, выражающее склонность ЛПР к риску, ξ и η – сравниваемые стратегии (лотереи).

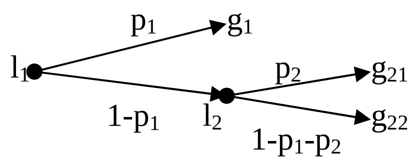
В нашем случае множество исходов $G = \{g_1,\ldots,g_n\}$ конечное, т.о. распределения ξ и η задаются векторами вероятностей $(p_1^\xi,\ldots,p_n^\xi)$ и $(p_1^\eta,\ldots,p_n^\eta)$ соответственно, а математические ожидания функции полезности вычисляются по формулам: $M_\xi[f] = f(g_1) \cdot p_1^\xi + \ldots + f(g_n) \cdot p_n^\xi$, $M_\eta[f] = f(g_1) \cdot p_1^\eta + \ldots + f(g_n) \cdot p_n^\eta$.

Итак, при наличии функции полезности, каждый исход g характеризуется некоторой полезностью f(g), каждая стратегия s – ожидаемой полезностью $M_s[f]$, а решение задачи принятия решений следует искать в виде: $M_s[f] \rightarrow \max$.

Замечание. Лотерею можно изобразить в виде графа. Если исходы окончательные, то он выглядит так:

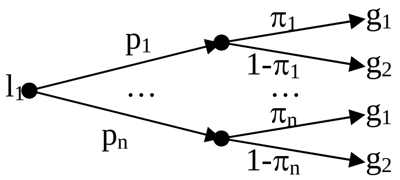


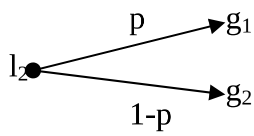
Возможны случаи, когда исходом является другая лотерея, например:



Необходимо узнать отношение ЛПР к риску, т.е. построить отношение R на множестве распределений вероятностей на G. Человеку трудно разобраться в лотерее с большим числом исходов. ЛПР гораздо проще ответить на вопрос типа: при каком значении вероятности p ему безразлично: а) участвовать в лотерее l с выигрышами g'~p, g''~(1-p), где g' предпочтительнее, чем g'', или б) сразу получить (без лотереи) выигрыш g''' такой, что g' предпочтительнее, чем g''', но g''' предпочтительнее, чем g''.

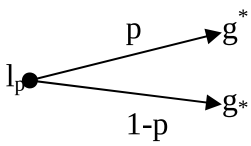
На основе ответов на вопросы такого типа можно сравнить по предпочтению любые две лотереи, а значит практически построить отношение R и соответствующую ему функцию полезности f при условии, что ЛПР допускает применение *правил фон Неймана – Моргенштерна*: 1) *правило замены*: если в исходной лотерее один из выигрышей заменить на другой, равный по предпочтительности выигрыш, то получим лотерею, равнопредпочтительную исходной; 2) *правило свертывания*: лотереи l_1 и l_2 одинаковы по предпочтительности, если $p=p_1\cdot\pi_1+p_2\cdot\pi_2+\ldots+p_n\cdot\pi_n$:





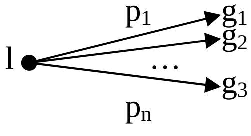
Пусть g^*, $g_* \in G$, g^* - наилучший исход, g_* - наихудший исход. Примем $f(g_*)=0$ (начало отсчета), $f(g^*)=1$ (масштаб измерений).

Базовая лотерея – лотерея l_p с исходами g^*~p, g_*~(1-p):

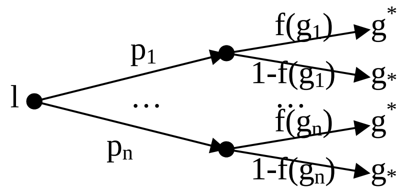


$\forall g \in G$ можно указать вероятность p, при которой получение выигрыша g без лотереи эквивалентно участию в базовой лотерее l_p. Так что, примем f(g)=p (ожидаемая полезность от участия в l_p равна p).

Тогда по правилу замены произвольную лотерею

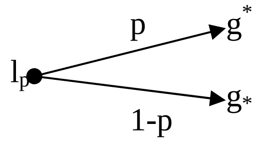


можно представить в виде равнопредпочтительной ей лотереи



,

которая, в свою очередь, по правилу свертывания ($p=p_1 \cdot f(g_1)+\ldots+p_n \cdot f(g_n)$) представляется в виде равнопредпочтительной ей базовой лотереи



Таким образом, для любой лотереи l можно найти равнопредпочтительную ей базовую лотерею l_p, при этом $M_l[f]=p_1 \cdot f(g_1)+\ldots+p_n \cdot f(g_n)=p$.

Построенная таким образом функция полезности f позволяет сравнить по предпочтительности любые две лотереи. Действительно, $\forall$ l′ и l″ можно построить равнопредпочтительные им лотереи $l_{p'}$ и $l_{p''}$ соответственно, и тогда $(l' \, R \, l'') \Leftrightarrow (M_{l'}[f] \geq M_{l''}[f]) \Leftrightarrow (p' \geq p'')$, то есть из двух лотерей предпочтительнее та, для которой вероятность получения наилучшего исхода g^* в базовой лотерее больше.

Характеристика отношения ЛПР к риску и свойства функции полезности

Пусть исходы $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$ оцениваются единственным количественным критерием $K(g_i)=x_i$, $K:G \rightarrow \mathcal{R}$. Тогда $X=[\underline{x},\overline{x}]$ – непрерывная шкала критерия эффективности K, а функция полезности f, построенная на ней, является монотонно возрастающей функцией.

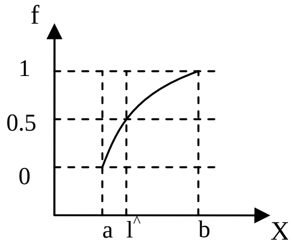
Достоверным эквивалентом лотереи l называется величина $l^\wedge$ такая, что $f(l^\wedge)=M_l[f]$ (полезность $l^\wedge$ равна ожидаемой полезности l). Т.е. для ЛПР безразлично, получить $l^\wedge$ наверняка или участвовать в лотерее l.

Достоверный эквивалент единственен, т.к. f монотонная.

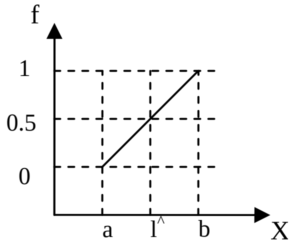
Средним результатом лотереи l называется величина $\bar{l}=p_1 \cdot x_1+\ldots+p_n \cdot x_n$.

Характеристику отношения ЛПР к риску можно получить путем анализа его выбора среди альтернатив: принять участие в лотерее l с исходами $g^* \sim 1/2$, $g_* \sim 1/2$, $K(g_*)=a$, $K(g^*)=b$ или получить наверняка $\bar{l}=(a+b)/2$.

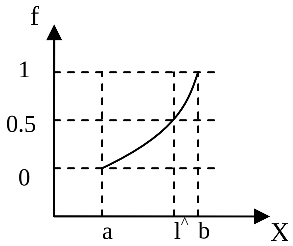
ЛПР не склонен к риску, если $\forall l \; f(\bar{l})>f(l^\wedge)$ (или $\bar{l}>l^\wedge$, т.к. f - монотонна).



ЛПР безразличен к риску, если $\forall l$ $f(\bar{l})=f(l^{\wedge})$ (или $\bar{l}=l^{\wedge}$, т.к. f - монотонна).



ЛПР склонен к риску, если $\forall l$ $f(\bar{l})<f(l^{\wedge})$ (или $\bar{l}<l^{\wedge}$, т.к. f - монотонна).



Для ЛПР безразличного к риску функция полезности линейна, значит можно обоснованно применять принцип среднего результата. Однако, большинство людей не склонны к риску.

Для выявления отношения ЛПР к риску на практике строят функцию полезности *по методу 5-ти точек* (Кини и Райфа).

Пусть $K(g)\in[\underline{x},\overline{x}]$.

1. Для $x^0=\underline{x}$, $x^1=\overline{x}$ положим $f(x^0)=0$, $f(x^1)=1$.
2. ЛПР просим указать достоверный эквивалент $x^{0.5}$ лотереи с исходами $g^*\sim1/2$, $g_*\sim1/2$, $K(g_*)=x^0$, $K(g^*)=x^1$.
3. ЛПР просим указать достоверный эквивалент $x^{0.25}$ лотереи с исходами $g^*\sim1/2$, $g_*\sim1/2$, $K(g_*)=x^0$, $K(g^*)=x^{0.5}$.
4. ЛПР просим указать достоверный эквивалент $x^{0.75}$ лотереи с исходами $g^*\sim1/2$, $g_*\sim1/2$, $K(g_*)=x^{0.5}$, $K(g^*)=x^{0.75}$.
5. Проверяем, что $x^{0.5}$ является достоверным эквивалентом лотереи с исходами $g^*\sim1/2$, $g_*\sim1/2$, $K(g_*)=x^{0.25}$, $K(g^*)=x^{0.75}$.
6. Строим график f(x) интерполяцией по полученным точкам.