Тема 4. Функция полезности.

Пусть заданы критерии $K_1,\ldots,K_n$; $X = \{ x \mid x = (x_1,\ldots,x_n) \}$ – множество векторых оценок вариантов по этим критериям. Пусть на X задано R – отношение предпочтения. Числовая функция $f : X \to \mathcal{R}$, называется *функцией полезности* (ценности, предпочтительности), если она обладает следующим свойством: $f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x\ R\ y$.

Если известна функция полезности, то поиск оптимального варианта сводится к задаче нахождения $x^* = \arg\max f(x)$, $x \in X$ – аргумента максимума функции полезности на множестве X.

Как найти функцию полезности? Методы построения функции полезности делятся на *эвристические* и *аксиоматические*.

К эвристическим методам можно отнести *метод главного критерия* и *метод обобщенного критерия*.

Метод главного критерия сводится к оптимизации по одному выбранному критерию, при условии, что остальные критерии не больше (или не меньше) приемлемых значений.

Метод обобщенного критерия заключается в свёртке набора критериев в числовую функцию, которая и будет являться функцией полезности.

Виды свёрток:

1) *аддитивная свёртка*: $f = \alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_n K_n$;
2) *мультипликативная свёртка*: $f = \exp(\alpha_1 \ln(K_1) + \ldots + \alpha_n \ln(K_n)) = = K_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot K_n^{\alpha_n}$;
3) *приведенная свёртка*: $f = \min(K_i/\alpha_i)$ по всем $i=1\ldots n$ (или $f = \max(K_i/\alpha_i)$ по всем $i=1\ldots n$).

Аксиоматические методы построения функции полезности – это формальные методы, основанные на том, что формулируются специальные предположения (аксиомы) о свойствах предпочтения, выполнение которых гарантирует существование функции полезности конкретного вида.

Обычно, при использовании таких методов функцию полезности строят в *аддитивном* виде:

$$f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n \qquad (*)$$

как сумму функций полезности по каждому критерию с некоторыми весовыми коэффициентами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Пусть $K_I \subset K = \{K_1,\ldots,K_n\}$ – подмножество множества критериев, т.е. группа критериев с номерами из множества $I = \{i_1,\ldots,i_m\}$. $\bar{I} = \{1,\ldots,n\} \backslash I$. Тогда $K_{\bar{I}}$ – все остальные критерии, а векторная оценка x представляется в виде $(x_I,x_{\bar{I}})$.

Говорят, что критерии K_I *не зависят по предпочтению* от критериев $K_{\bar{I}}$, если предпочтения для любых двух оценок $x = (x_I,x_{\bar{I}})$ и $x' = (x_I',x_{\bar{I}})$, содержащих одинаковые компоненты с номерами из $\bar{I}$, не зависят от самих значений этих компонент.

Пример 1.

$n = 5$, $I = \{1,3,4\}$, $\bar{I} = \{2,5\}$.

$x = (7,1,2,8,2) = (x_I,x_{\bar{I}})$, где $x_I = (7,2,8)$, $x_{\bar{I}} = (1,2)$.

$y = (4,1,8,3,2) = (y_I,y_{\bar{I}})$, где $y_I = (4,8,3)$, $y_{\bar{I}} = (1,2)$.

Таким образом, $x_{\bar{I}} = y_{\bar{I}}$.

Если критерии K_I не зависят по предпочтению от критериев $K_{\bar{I}}$ и оценка x предпочтительнее, чем оценка y, то и, например, оценка $x_1 = (7,4,2,8,5)$ будет предпочтительнее, чем $y_1 = (4,4,8,3,5)$, потому что их значения по критериям из группы K_I совпадают с соответствующими значениями оценок x и y, а оценки по остальным критериям одинаковые. Таким образом, вместо $x_{\bar{I}} = y_{\bar{I}} = (1,2)$ можно подставить любую оценку (a,b) и предпочтение сохранится: (7,a,2,8,b) предпочтительнее, чем (4,a,8,3,b).

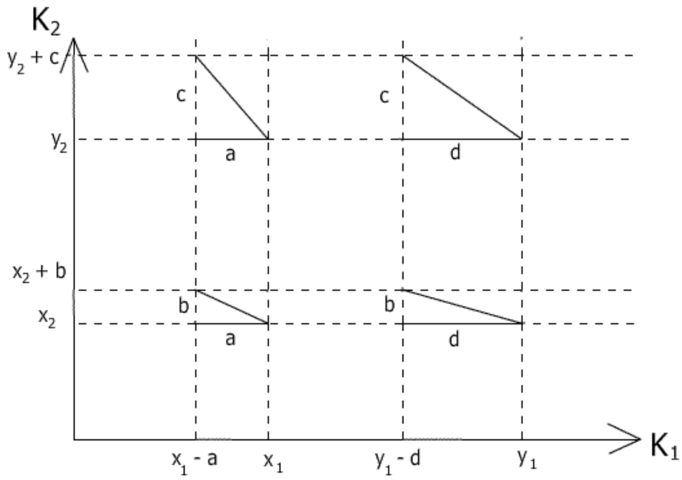
Критерии $K_1,\ldots,K_n$ такие, что любой набор K_I из них не зависит по предпочтению от остальных критериев $K_{\bar{I}}$, называются *взаимно независимыми по предпочтению*.

Теорема Дебре (критерий существования аддитивной функции полезности): функция полезности может быть задана в аддитивном виде (*) тогда и только тогда, когда критерии $K_1,\ldots,K_n$ взаимно независимы по предпочтению (при $n\geq3$).

При $n=2$, кроме взаимной независимости критериев, требуется выполнение *условия соответственных замещений* (при $n\geq3$ оно выполняется автоматически):

$\forall x_1,x_2,y_1,y_2,a,b,c,d$ если $(x_1,x_2) \sim (x_1-a,x_2+b)$ и $(x_1,y_2) \sim (x_1-a,y_2+c)$, то $(y_1,x_2) \sim (y_1-d,x_2+b)$ и $(y_1,y_2) \sim (y_1-d,y_2+c)$.

Т.е., если увеличение на b и c разных значений x_2 и y_2 критерия K_2 при некотором опорном значении x_1 критерия K_1 компенсируется одним и тем же уменьшением этого значения x_1 критерия K_1, то такие же увеличения b и c тех же значений x_2 и y_2 критерия K_2 сохраняются и при любом другом опорном значении y_1 критерия K_1.



Как осуществляется проверка взаимной независимости критериев по предпочтению?

Непосредственно по определению проверить независимость критериев затруднительно, т.к. даже при небольших n возникает большое число вариантов, которые надо проверить.

Утверждение (Леонтьева-Гормана): если любая пара критериев { K_i, K_j } не зависит по предпочтению от остальных (n-2) критериев, то все критерии $K_1,\ldots,K_n$ взаимно независимы по предпочтению.

Таким образом, проверка сводится к установлению независимости только всех пар критериев от всех остальных критериев.

Пусть необходимо проверить на независимость по предпочтению наборы K_I и $K_{\bar{I}}$. Берём набор $x_{\bar{I}}^+$ наилучших (явно хороших) значений $K_{\bar{I}}$ и подбираем (запрашиваем у ЛПР) два разных набора x_I' и x_I'' таких, что $(x_I', x_{\bar{I}}^+) \sim (x_I'', x_{\bar{I}}^+)$. Затем берём набор $x_{\bar{I}}^-$ самых плохих оценок и спрашиваем у ЛПР, сохранилось ли безразличие $(x_I', x_{\bar{I}}^-) \sim (x_I'', x_{\bar{I}}^-)$? Если нет, то критерии K_I зависят от критериев $K_{\bar{I}}$. Если да, повторяем процедуру еще для некоторых других x_I' и x_I''. Если всё время безразличие остаётся, задаём вопрос в общем виде (сохранится ли безразличие при любых наборах). Если да, то наборы критериев K_I и $K_{\bar{I}}$ независимы.

Методы построения аддитивной функции полезности

Шаговый метод совместного шкалирования.

Пусть n=2 и условие соответственных замещений выполнено.

$f(x_1,x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)\ \forall(x_1,x_2)\in X$.

Обозначим диапазоны изменения оценок x_1 и x_2: $x_{1*} \le x_1 \le x_1^*$, $x_{2*} \le x_2 \le x_2^*$.

Полагаем $f(x_{1*},x_{2*}) = f_1(x_{1*}) = f_2(x_{2*}) = 0$ (начало отсчета).

Берем любое значение $x_1^1 > x_{1*}$ достаточно близкое к нему. Устанавливаем $f_1(x_1^1) = 1$ (единица измерения).

От ЛПР требуем указать x_2^1 такое, что $(x_1^1, x_{2*}) \sim (x_{1*}, x_2^1)$, для этого значения также $f_1(x_2^1) = 1$.

Затем у ЛПР запрашиваем x_1^2 и x_2^2 такие, что: $(x_1^2, x_{2*}) \sim (x_1^1, x_2^1) \sim$ $\sim (x_{1*}, x_2^2)$. $f(x_1^1,x_2^1) = 1+1 = 2 \Rightarrow f_1(x_1^2) = f_2(x_2^2) = 2$.

Далее у ЛПР запрашиваем x_1^3 и x_2^3 такие, что: $(x_1^3, x_{2*}) \sim (x_1^2, x_2^1) \sim$ $\sim (x_1^1, x_2^2) \sim (x_{1*}, x_2^3) \Rightarrow f_1(x_1^3) = f_2(x_2^3) = 3$. И т.д.

Таким образом, получаем наборы значений $f_1(x_{1*})$, $f_1(x_1^1)$, $f_1(x_1^2)$, $f_1(x_1^3)$… и $f_2(x_{2*})$, $f_2(x_2^1)$, $f_2(x_2^2)$, $f_1(x_2^3)$… по которым с помощью интерполяции строятся функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Метод половинного деления.

Метод находит функцию полезности в виде $f(x_1,x_2) = \lambda_1 f_1(x_1)+\lambda_2 f_2(x_2)$, где $f_1(x_{1*}) = f_2(x_{2*}) = 0$, $f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = 1$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Построим функцию f_1.

ЛПР просим указать среднюю по полезности оценку $x_1^{0.5} \in [x_{1*};x_1^*]$, т.е. такую, изменение полезности на $[x_{1*};x_1^{0.5}]$ равно изменению полезности на $[x_1^{0.5};x_1^*]$. Устанавливаем $f_1(x_1^{0.5}) = 0.5$.

Далее аналогично получаем $x_1^{0.25} \in [x_{1*};x_1^{0.5}] \Rightarrow f_1(x_1^{0.25}) = 0.25$ и $x_1^{0.75} \in [x_1^{0.5};x_1^*] \Rightarrow f_1(x_1^{0.75}) = 0.75$ и т.д.

С помощью интерполяции, восстанавливаем функцию f_1 по её значениям в точках $x_1^{0.5}$, $x_1^{0.25}$, $x_1^{0.75}$…

Функция f_2 строится аналогично.

Для нахождения весового коэффициента λ_1 достаточно запросить у ЛПР пару одинаковых по предпочтительности оценок $(x_1',x_2') \sim (x_1'',x_2'') \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1',x_2') = f(x_1'',x_2'') \Rightarrow \lambda_1 f_1(x_1')+(1-\lambda_1)f_2(x_2') = \lambda_1 f_1(x_1'')+(1-\lambda_1)f_2(x_2'')$, а из этого равенства уже можно выразить λ_1 (а $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$).