Тема 3. Формальная модель выбора.

Пусть задано множество вариантов А. Будем обозначать варианты буквами x, y, z… с индексами или без них. В содержательных задачах роль вариантов могут играть кандидаты, абитуриенты, планы, стратегии, проекты, товары и т.д. Будем считать, что А – конечное множество из двух или более элементов. Пусть далее $\mathcal{A}$ – некоторое заданное множество непустых подмножеств X вариантов из А. Любое подмножество $X \in \mathcal{A}$ может быть предъявлено для осуществления акта выбора и называется далее *предъявлением*. Будем обозначать A^0 – множество всех непустых подмножеств множества А. A^0 – универсальное множество в данной задаче.

В специально оговариваемых случаях могут вводиться ограничения на $\mathcal{A}$ (например: $\mathcal{A}$ содержит пары вариантов из А и т.п.). Акт выбора состоит в выделении из предъявления $X \in \mathcal{A}$ по некоторому фиксированному правилу подмножества $Y \subseteq X$, называемого «*выбор из X*» или в установлении факта отказа от выбора. В последнем случае говорят, что выбор пуст ($Y = \varnothing$).

Общая модель выбора:

$$\xrightarrow{\;X\;} \boxed{\text{выбор}} \xrightarrow{\;Y \subseteq X\;}$$

В результате преобразования выбора каждому X ставится в соответствие $Y \subseteq X$ и возникает пара множеств $<X, Y>$. $C(\cdot) = \{<X, Y> \mid X \in \mathcal{A}\}$ – *функция выбора*, т.е. $Y = C(X)$. Способы задания функции выбора сводятся к одной из двух форм: 1) поэлементное задание: $C(X) = \{ y \in X \mid \ldots\}$, 2) целостное задание: $C(X) = Y \subseteq X$ такое, что ….

Характеристические свойства функций выбора

Рассмотрим ряд «естественных» требований к «разумному» выбору.

Будем говорить, что функция выбора $C(\cdot)$ удовлетворяет условию *наследования* (Н), если $\forall\, X, X' \in \mathcal{A}$ выполняется условие:

$$[\, X' \subseteq X \,] \Rightarrow [\, C(X) \cap X' \subseteq C(X') \,].$$

Т.е., если сузить предъявление, отбросив часть вариантов, то все варианты из суженного множества X′, которые были выбраны из исходного множества X, также попадут в выбор из X′.

Пример: товары, выбранные из большого ассортимента, естественно будут выбраны и из содержащего их более узкого ассортимента.

Заметим, что это условие не исключает того, что в выбор из X′ попадут еще какие-то варианты, которые в выбор из X не попали.

Усилим условие H.

Будем говорить, что функция выбора $C(\cdot)$ удовлетворяет условию *строгого наследования* или *константности* (K) выбора, если $\forall$ X, X′ $\in \mathcal{A}$ выполняется условие:

$[\, X' \subseteq X \,] \Rightarrow [$ если $C(X) = \varnothing$, то $C(X') = \varnothing$, а если $C(X) \cap X' \neq \varnothing$, то $C(X') = C(X) \cap X' \,]$.

Т.е. все выбранные из X варианты и только они попадают в выбор из X′, если, конечно, они в X′ содержатся. Если выбор из X был пуст, то и выбор из X′ будет пуст. И только если пересечение C(X) и X′ пусто, а C(X) непусто, то C(X′) может содержать какие-то другие варианты.

Пример 1.

Вы выбрали какие-то товары в каталоге, пришли в магазин и в наличии имеются какие-то из выбранных вами по каталогу товаров, то именно их вы и выбираете в магазине. Если же ни одного из выбранных вами по каталогу товаров в наличии нет, то возможно вы выберете что-то другое. А если вам изначально ничего не понравилось в каталоге, то вы и не пойдете в этот магазин ☺.

Функция выбора $C(\cdot)$ удовлетворяет условию *согласия* (C), если $\forall$ X′, X″ $\in \mathcal{A}$ выполняется условие:

$[\, X = X' \cup X'' \,] \Rightarrow [\, C(X') \cap C(X'') \subseteq C(X) \,]$.

Т.е. все одинаковые варианты, выбираемые из X′ и X″ по отдельности, должны выбираться и из объединения X′∪X″. Хотя в этот выбор могут попасть и еще какие-то другие варианты.

Пример 2.

В одном доме находятся два магазина. X′ – ассортимент первого магазина, X″ – ассортимент второго магазина. Вы заходите в любой из этих магазинов, чтобы купить пиво и закуску. В обоих магазинах есть пиво "Tuborg", которое вам больше всего нравится. А вот закуска в их ассортиментах представлена по-разному. Из того, что продается в первом магазине, вам больше всего нравятся сухарики "3 корочки". А если вы идете в первый магазин, то покупаете там кальмары

“Дальпико”. Таким образом, $C(X') = \{$ “Tuborg”, “3 корочки” $\}$, $C(X'') = \{$ “Tuborg”, “Дальпико” $\}$. Теперь представим, что эти магазины объединятся в один магазин с общим ассортиментом $X = X' \cup X''$. В таком случае, в ваш выбор $C(X)$, естественно, по-прежнему войдет пиво “Tuborg” $= C(X') \cap C(X'')$. А вот, какую закуску вы будете покупать, неизвестно.

Функция выбора $C(\cdot)$ удовлетворяет условию *независимости от отбрасывания отвергнутых вариантов* (О), если $\forall$ X, X′ $\in \mathcal{A}$ выполняется условие:

$[\, C(X) \subseteq X' \subseteq X \,] \Rightarrow [\, C(X') = C(X) \,]$.

Т.е., сужение предъявления за счет отбрасывания некоторых или всех невыбранных вариантов не изменяет выбор.

Пример: на ваш выбор в магазине никак не повлияет отсутствие в наличии товаров, которые не понравились вам в каталоге.

Уровни требований к функциям выбора:

0 – никаких;

1 – Н и С;

2 – Н, С и О;

3 – К.

Будем обозначать также буквами Н, С, О и К множества функций выбора, удовлетворяющих соответствующим условиям.

Теорема: условия Н, С, О независимы (т.е. все возможные пересечения множеств Н, С, О и их дополнений не пусты), условие К является усилением каждого из условий Н, С, О (т.е. $К \subset Н \cap С \cap О$).

Если справедливо условие Н, то справедливо и следующее, более слабое условие: $\forall X \in \mathcal{A}$ верно, что $[\, x \in C(X) \,] \Rightarrow [\, x \in C(\{ x, y \}) \ \forall y \in X \,]$. Это условие называется *обратным условием Кондорсе* (Con^-). Оно означает, что если вариант выбирается из X, то он выбирается и из любой содержащей его пары вариантов.

Если справедливо условие С, то справедливо и следующее, более слабое условие: $\forall X \in \mathcal{A}$ верно, что $[\, \forall y \in X \ \ x \in C(\{ x, y \}) \,] \Rightarrow [\, x \in C(X) \,]$. Это условие называется *прямым условием Кондорсе* (Con^+). Оно означает, что если вариант выбирается из всех содержащих его парных предъявлений, то он выбирается из X.

Функция выбора удовлетворяет *принципу Кондорсе*, если для неё одновременно выполняются условия Con^- и Con^+.

Теорема: множества $Con^- \cap Con^+$ и $Н \cap С$ совпадают.