Тема 2. Описание предпочтений.

Пусть имеется совокупность объектов A (например, варианты стратегий, исходы, предметы и т.п.) и имеется ЛПР, для которого данные объекты не равнозначны, т.е. ЛПР обладает некоторой системой предпочтений на этом множестве. Эти предпочтения можно описать различными способами. Далее мы перечислим наиболее распространенные из этих способов.

Ранжирование объектов – представление элементов множества A в виде последовательности в порядке убывания (или невозрастания) их предпочтительности. При этом, ничего не говорится о том, "на сколько" один элемент предпочтительнее другого.

Задание функции предпочтительности, т.е. каждому объекту ставится в соответствие некоторое число, например, оценка его общего качества в баллах.

Задание функции выбора $X^*=C(X)$, которая для любого подмножества X множества A ($X \subseteq A$) дает подмножество $X^* \subseteq X$ лучших с точки зрения ЛПР элементов множества X.

Задание сравнительной предпочтительности для каждой пары элементов a и b в виде:

а) «a предпочтительнее b», либо

б) «b предпочтительнее a», либо

в) «a и b равнопредпочтительны», либо

г) «a и b несравнимы».

Множество пар вида <x,y>, для которых верно, что «x предпочтительнее y», называется бинарным *отношением строгого предпочтения P*.

Пары <x,y> равнопредпочтительных элементов образуют бинарное *отношение безразличия I*.

Пары <x,y> несравнимых элементов составляют множество *N* – бинарное *отношение несравнимости по предпочтению*.

В теории принятия решений обычно предполагается, что множества, на которых задаются отношения предпочтения, состоят из более, чем 2-х элементов – *принцип парнодоминантности*.

Объединение отношений строгой предпочтительности и безразличия $R=P\cup I$ называется *отношением нестрогого предпочтения*. Т.е. R – это множество пар <x,y> таких, что «x не менее предпочтителен, чем y».

Свойства введенных отношений:

P может не являться *транзитивным*, т.е. из aPb («a предпочтительнее b») и bPc («b предпочтительнее c») не обязательно следует, что aPc («a предпочтительнее c»).

P – *антирефлексивно*, т.е не содержит пар вида <x,x> (элемент x не может быть предпочтительнее самого себя).

P – *антисимметрично*, т.е. если P содержит пару различных элементов <x,y>, то оно не содержит пару <y,x>.

I – *рефлексивно*, т.е. содержит все пары вида <x,x>.

I – *симметрично*, т.е. если I содержит пару <x,y>, то в нем есть и пара <y,x>.

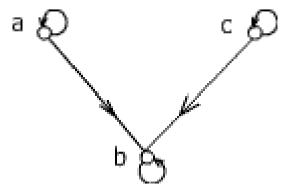
I – транзитивно, т.е. если $<x,y>\in I$ и $<y,z>\in I$, то и $<x,z>\in I$.

R – рефлексивно, антисимметрично, не обязательно транзитивно.

Отношение предпочтения можно изобразить в виде графа.

Пример 1.

A={a,b,c}. R={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<c,b>}.



По отношениям предпочтения можно построить функцию выбора, используя одно из правил выбора:

1) Элемент a* выбирается из $X\subseteq A$, если a* является наилучшим, т.е a^*Ra для любого $a\in A$. $C_1(X)=\{a^* \mid \forall a\in A\ a^*Ra\}$. Замечание: если a^*Ib, то b – тоже наилучший.
2) Элемент a* выбирается из $X\subseteq A$, если a^o является максимальным, т.е. нет такого $a\in A$, что aPa^o. $C_2(X)=\{a^o \mid$ не $\exists a\in A$: $aPa^o\}$.

Выбор по правилу C_1 зачастую не дает результатов. Так, в примере 1: $C_1(\{a,b,c\})=\varnothing$, $C_2(\{a,b,c\})=\{a,c\}$.

По числовой функции предпочтения можно построить отношения предпочтения: $aRb \Leftrightarrow f(a)\geq f(b)$, $aIb \Leftrightarrow f(a)=f(b)$, $aPb \Leftrightarrow f(a)>f(b)$.

Но не во всех случаях по отношениям предпочтения удается построить функцию, удовлетворяющую указанным свойствам.

Последним из рассматриваемых способов описания предпочтений будет оценивание предпочтительности каждого объекта a по n признакам (критериям): $K_i(a)=x_i$ – *оценка* a по критерию K_i. Вектор, составленный из оценок a по каждому из критериев K_i, называется *векторной оценкой* a: $x=(x_1,\ldots x_n)$.

Критерии могут быть числовыми и нечисловыми. Формально нечисловые критерии всегда можно превратить в числовые, поэтому впредь под критерием будем всегда подразумевать числовую функцию.

Шкалой критерия называется множество допустимых значений критерия. Если любые два объекта имеют различные оценки по данной шкале, то она называется *строгой* (в противном случае – *нестрогой*).

Пусть $K_i(a)>K_i(b)$ и большая оценка по K_i предпочтительней. Если, зная оценки $K_i(a)$ и $K_i(b)$, нельзя ответить на вопрос: "на сколько" a предпочтительнее b по критерию K_i, то шкала критерия K_i называется *порядковой*, а сам критерий – *качественным*. В противном случае, критерий называется *количественным*.

Если известны векторные оценки всех вариантов по n критериям, то по ним можно построить следующее отношение строгого предпочтения. Пусть x – векторная оценка варианта a, y – векторная оценка варианта b.

$aP^0b \Leftrightarrow (\forall i=0\ldots n\ x_i \geq y_i$ и $\exists j$: $x_j>y_j)$.

Это отношение называется *отношением Парето*. P^0 используется в качестве P, если никакой другой информации о предпочтениях или критериях от ЛПР не получено. В любом случае, предполагается, что $P^0 \subseteq P$.

Иногда применяется *отношение предпочтения по Слейтеру*:

$aSb \Leftrightarrow x_i>y_i$, $i=1,\ldots,n$.

Если от ЛПР получена информация о том, что что критерий K_1 абсолютно важнее всех остальных, критерий K_2 в свою очередь важнее всех, кроме K_1 и т.д., то применяют такую модель предпочтений, как *отношение лексикографического порядка*:

$aLb \Leftrightarrow \exists i$: $i \in [1..n]$, $x_i>y_i$, $x_j=y_j$ при $j=1,\ldots,i-1$.