Теория множеств.

Множество – это первичное неопределяемое понятие математики (как, например, точка в геометрии). Слова «набор», «совокупность», «семейство» употребляют в качестве его синонимов.

Пример 1. Множествами являются:

– набор из десяти арабских цифр;

– совокупность учащихся института;

– семейство бобовых;

– множество людей на Земле;

– множество действительных чисел.

Множество может состоять из любых различимых объектов (чисел, букв, людей, растений…). Эти объекты называются *элементами* данного множества. Если данный объект x является элементом множества X, то говорят, что x *принадлежит* X (обозначается: $x \in X$). В противном случае говорят, что x *не принадлежит* X (обозначается: $x \notin X$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначается: $\varnothing$). Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными* (например, первые 4 множества из примера 1). Аналогично, множества, состоящие из бесконечного числа элементов, называются *бесконечными* (например, последнее множество из примера 1). Мы будем рассматривать, в основном, конечные множества.

Способы задания множества:

1) перечислить все элементы этого множества;

2) указать свойство, которым обладают только элементы этого множества (*характеристическое свойство*);

3) описать метод (алгоритм) построения этого множества (*порождающую процедуру*).

Пример 2. Множество C сигналов светофора можно задать 1-м способом, просто выписав их названия, неважно в каком порядке. Будем делать это так: C = {красный, желтый, зеленый}.

Пример 3. Множество K квадратов можно задать 2-м способом, указав, что это совокупность всех прямоугольников, у которых длины всех сторон равны. Формальная запись такова:

K = { Прямоугольники | Длины всех сторон равны }.

Пример 4. Множество X корней уравнения x^2-5x+6=0 можно задать 3-м способом, описав метод нахождения его элементов, например, графический: построить график функции f(x)=x^2-5x+6 в координатной плоскости Oxy и найти точки его пересечения с осью Ox. Множество X можно задать и первыми двумя способами: 1) $X = \{2,3\}$; 2) множество чисел, при подстановке каждого из которых вместо x, уравнение x^2-5x+6=0 превращается в верное равенство; формально это выглядит так: $X = \{x \mid x^2-5x+6=0\}$.

Множества A и B называются *равными*, если их элементы совпадают (обозначается: $A=B$, в противном случае – $A \neq B$). Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B (обозначается: $A \subseteq B$). При этом говорят, что A *содержится* в B, а B *включает* A. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством* B (обозначается: $A \subset B$). Пустое множество содержится в любом множестве. Любое множество является своим подмножеством (несобственным). Теперь можно дать другое определение равенства множеств: $A=B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Обычно, в каждом конкретном случае берется некоторое множество U (*универсум*), которое включает все рассматриваемые множества. В следующих 4-х определениях предполагается $A \subseteq U$, $B \subseteq U$.

Пересечением множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит и A, и B одновременно (обозначается $A \cap B$). $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

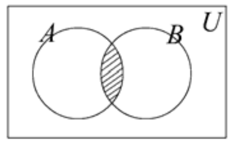


Рис.1

Обычно дают следующую графическую интерпретацию этого определения. Универсум изображают в виде прямоугольника, внутри которого кругами изображают рассматриваемые множества. Точки, лежащие внутри кругов можно рассматривать как элементы соответствующих множеств. Пересечением множеств будет заштрихованная область, общая для обоих кругов (см. рис.1). Полученное изображение называют диаграммой Эйлера-Венна.

Объединением множеств A и B называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A и B (обозначается: $A \cup B$) (рис.2).

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

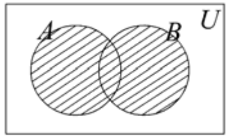


Рис.2

Дополнением (до U) множества A называется множество, состоящее из всех элементов U, не принадлежащих A (обозначается: $\overline{A}$) (рис.3).

$\overline{A} = \{x \mid x \in U$ и $x \notin A\}$.

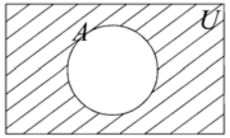


Рис.3

Эти три операции называют *булевыми операциями над множествами*.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B (обозначается: $A \backslash B$) (рис.4).

$A \backslash B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Утверждение: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

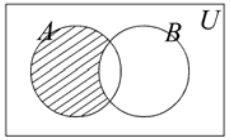


Рис.4

Пример 7. Пусть $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ – универсум.

$A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$, $B = \{ 3, 4, 6, 7 \}$.

Тогда: $A \cap B = \{ 3, 7 \}$, $A \cup B = \{ 2, 3, 5, 7, 4, 6 \}$.

$\overline{A} = \{ 1, 4, 6, 8 \}$, $\overline{B} = \{ 1, 2, 5, 8 \}$, $A \backslash B = \{ 2, 5 \}$, $B \backslash A = \{ 4, 6 \}$.

Свойства операций над множествами.

1. A=A.

2. *Свойства дополнения*:

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = U$

3. *Идемпотентность*:

$A \cap A = A$ $\qquad$ $A \cup A = A$

4. *Коммутативность*:

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

5. *Ассоциативность*:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

6. *Дистрибутивность*:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7. *Поглощение*:

$A \cap (B \cup A) = A$ $\qquad$ $A \cup (B \cap A) = A$

8. *Свойства U*:

$A \cap U = A$ $\qquad$ $A \cup U = U$

9. *Свойства $\varnothing$*:

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup \varnothing = A$

10. *Законы де Моргана*:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

11. *Инволютивность*:

$\overline{\overline{A}} = A$

12. *Связь U с $\varnothing$*:

$\overline{U} = \varnothing$ $\qquad$ $\overline{\varnothing} = U$

Бинарные отношения.

Пусть A и B – произвольные множества. Возьмем по одному элементу из каждого множества, a из A, b из B и запишем их так: <a, b> (сначала элемент первого множества, затем элемент второго множества – т.е. нам важен порядок, в котором берутся элементы). Такой объект будем называть *упорядоченной парой*. *Равными* будем считать только те пары, у которых элементы с одинаковыми номерами равны. <a, b> = <c, d>, если a = c и b = d. Очевидно, что если a ≠ b, то <a, b> ≠ <b, a>.

Декартовым произведением произвольных множеств A и B (обозначается: $A \times B$) называется множество, состоящее из всех возможных упорядоченных пар, первый элемент которых принадлежит A, а второй принадлежит B. По определению: $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A$ и $b \in B\}$. Очевидно, что если A≠B, то $A \times B \neq$

$B\times A$. Декартово произведение множества A само на себя n раз называется *декартовой степенью* A (обозначается: A^n).

Пример 5. Пусть $A = \{x, y\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$.

$A\times B = \{\langle x, 1\rangle, \langle x, 2\rangle, \langle x, 3\rangle, \langle y, 1\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle y, 3\rangle\}$.

$B\times A = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, x\rangle, \langle 1, y\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 3, y\rangle\}$.

$A\times A = A^2 = \{\langle x, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle y, y\rangle\}$.

$B\times B = B^2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

Бинарным отношением на множестве M называется множество некоторых упорядоченных пар элементов множества M. Если ρ – бинарное отношение и пара $\langle x, y\rangle$ принадлежит этому отношению, то пишут: $\langle x, y\rangle \in \rho$ или $x \rho y$. Очевидно, $\rho \subseteq M^2$.

Пример 6. Множество $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$ является бинарным отношением на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пример 7. Отношение $\geq$ на множестве целых чисел является бинарным отношением. Это бесконечное множество упорядоченных пар вида $\langle x, y\rangle$, где $x \geq y$, x и y – целые числа. Этому отношению принадлежат, например, пары $\langle 5, 3\rangle$, $\langle 2, 2\rangle$, $\langle 324, -23\rangle$ и не принадлежат пары $\langle 5, 7\rangle$, $\langle -3, 2\rangle$.

Пример 8. Отношение равенства на множестве A является бинарным отношением: $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$. I_A называется *диагональю* множества A.

Поскольку бинарные отношения являются множествами, то к ним применимы операции объединения, пересечения, дополнения и разности.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D(\rho) = \{ x \mid$ существует такое y, что $x\rho y \}$. *Областью значений* бинарного отношения ρ называется множество $R(\rho) = \{ y \mid$ существует такое x, что $x\rho y \}$.

Отношением, *обратным* к бинарному отношению $\rho \subseteq M^2$, называется бинарное отношение $\rho^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \rho\}$. Очевидно, что $D(\rho^{-1}) = R(\rho)$, $R(\rho^{-1}) = D(\rho)$, $\rho^{-1} \subseteq M^2$.

Композицией бинарных отношений ρ_1 и ρ_2, заданных на множестве M, называется бинарное отношение $\rho_2 \circ \rho_1 = \{ \langle x, z\rangle \mid$ существует y такое, что $\langle x, y\rangle \in \rho_1$ и $\langle y, z\rangle \subseteq \rho_2 \}$. Очевидно, что $\rho_2 \circ \rho_1 \subseteq M^2$.

Пример 9. Пусть бинарное отношение ρ задано на множестве $M = \{a, b, c, d\}$, $\rho = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$. Тогда $D(\rho) = \{a, c\}$, $R(\rho) = \{b, c, d\}$, $\rho^{-1} = \{\langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, c\rangle\}$, $\rho \circ \rho = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$, $\rho^{-1} \circ \rho = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$, $\rho \circ \rho^{-1} = \{\langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$.

Пусть ρ – бинарное отношение на множестве M. Отношение ρ называется *рефлексивным*, если $x \rho x$ для любого $x \in M$. Отношение ρ называется *симметричным*, если вместе с каждой парой $\langle x, y\rangle$ оно содержит и пару $\langle y, x\rangle$. Отношение ρ называется *транзитивным*, если из того, что $x \rho y$ и $y \rho z$ следует, что $x \rho z$. Отношение ρ называется *антисимметричным*, если оно не содержит одновременно пары $\langle x, y\rangle$ и $\langle y, x\rangle$ различных элементов $x \neq y$ множества M.

Укажем критерии выполнения этих свойств.

Бинарное отношение ρ на множестве M рефлексивно тогда и только тогда, когда $I_M \subseteq \rho$.

Бинарное отношение ρ симметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \rho^{-1}$.

Бинарное отношение ρ на множестве M антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} = I_M$.

Бинарное отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Пример 10. Отношение из примера 6 является антисимметричным, но не является симметричным, рефлексивным и транзитивным. Отношение из примера 7 является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, но не является симметричным. Отношение I_A обладает всеми четырьмя рассматриваемыми свойствами. Отношения $\rho^{-1} \circ \rho$ и $\rho \circ \rho^{-1}$

являются симметричными, транзитивными, но не являются антисимметричными и рефлексивными.

Отношением *эквивалентности* на множестве М называется транзитивное, симметричное и рефлексивное на М бинарное отношение.

Отношением *частичного порядка* на множестве М называется транзитивное, антисимметричное и рефлексивное на М бинарное отношение ρ.

Пример 11. Отношение из примера 7 является отношением частичного порядка. Отношение I_A является отношением эквивалентности и частичного порядка. Отношение параллельности на множестве прямых является отношением эквивалентности.

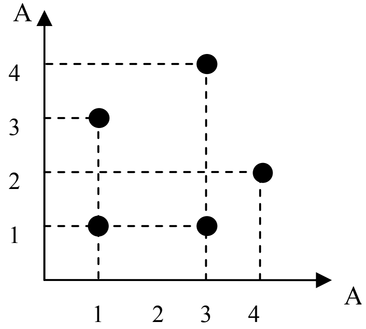
Другие способы задания отношений. Теория графов.

Произвольное множество точек координатной плоскости можно рассматривать как изображение некоторого бинарного отношения и называть его *графиком* этого отношения.

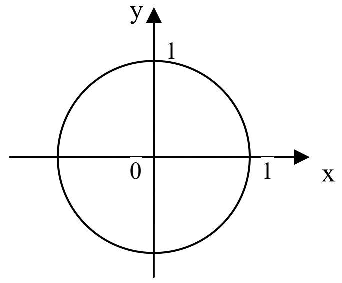
И наоборот, любое бинарное отношение ρ, заданное на множестве А, можно изобразить на координатной плоскости следующим образом: на координатных осях отмечают элементы множества А и для каждой пары $\langle x,y\rangle \in \rho$, $x,y \in A$ на плоскости ставят точку (x,y).

Пример 12. Пусть бинарное отношение ρ задано на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$.

Изобразим его на координатной плоскости:



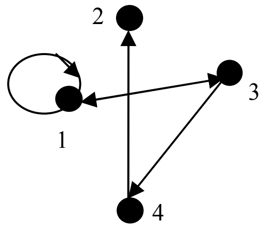
Пример 13. Окружность единичного радиуса с центром в начале координат изображает бинарное отношение $\rho = \{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2 = 1$, x, y – действительные числа$\}$:



Т.е., график – это альтернативный способ задания отношений.

Кроме того, любое бинарное отношение, заданное на множестве А, можно изобразить в виде т.н. *ориентированного графа* $G = \langle A,\rho\rangle$ следующим образом: произвольным образом отмечают точками элементы множества А и для каждой пары $\langle x,y\rangle \in \rho$, $x,y \in A$ проводят стрелку из точки x в точку y. Таким образом, А будет являться множеством *вершин*, а ρ - множеством *дуг* графа G.

Пример 14. Отношение из примера 12 можно представить в виде *орграфа*:



Как видно из рисунка, парам вида $\langle x,x\rangle \in \rho$, $x \in A$ соответствует стрелка, замыкающаяся на той же вершине, из которой она выходит (т.н. *петля*), а в случае $\langle x,y\rangle \in \rho$ и $\langle y,x\rangle \in \rho$, $x,y \in A$ стрелка, соединяющая вершины x и y будет двунаправленной

Каждому орграфу $G = \langle A,\rho\rangle$ ставится в соответствие т.н. *матрица смежности* S размера $n \times n$, где n – количество вершин графа, элементы которой вычисляются по следующему правилу: $s_{ij} = 1$, если в G есть дуга из вершины a_i в вершину a_j; $s_{ij} = 0$ - в противном случае. .

Очевидно, что любой орграф изображает некоторое отношение, заданное на множестве его вершин, т.о. представление в виде орграфа или матрицы смежности – это еще два альтернативных способа задания отношений (правда с помощью них можно описывать только конечные отношения).

Симметричное отношение изображают в виде *неориентированного графа* (петли не рисуют, вместо двунаправленных стрелок рисуют линии – т.н. *ребра* графа).

Пример 15. Карта метро является неориентированным графом, который изображает отношение $\rho = \{\langle x,y\rangle \mid \text{идет поезд от } x \text{ до } y\}$, заданное на множестве A станций метрополитена.

Если каждому ребру графа (дуге орграфа) поставлено в соответствие некоторое число (т.н. вес), то такой граф называется *нагруженным графом*.

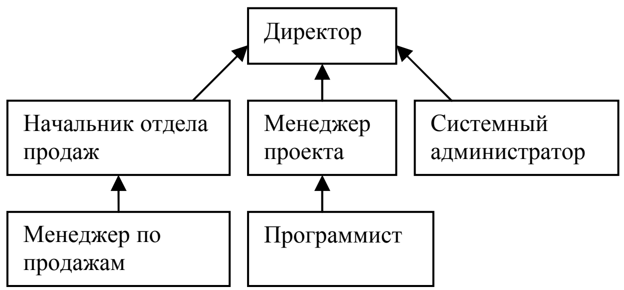
Пример 16. Карта автомобильных дорог с отмеченными расстояниями между населенными пунктами является нагруженным графом.

Теория графов является разделом дискретной математики. Предметом её изучения являются различные виды графов, их свойства, алгоритмы построения и методы решения различных задач, связанных с графами.

Примером оптимизационной задачи на графах является задача поиска минимального пути в нагруженном графе (т.е. нахождения набора вершин, связанных ребрами (дугами), сумма весов которых минимальна). Такая задача возникает, например, при маршрутизации пакетов сигналов, проходящих по компьютерным сетям.

Рассмотрим еще один специальный вид графов – т.н. *диаграммы Хассе*. Они используются для изображения отношений частичного порядка (т.е. отношений обладающих одновременно свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности).

Пример 17. Пусть задано множество работников некоторой компьютерной фирмы: {«Директор (Д)», «Менеджер проекта (МП)», «Программист (П)», «Начальник отдела продаж (НОП)», «Менеджер по продажам (МПП)», «Системный администратор (СА)»}, на котором задано отношение «непосредственно подчиняется» = {<МПП, НОП>, <НОП, Д>, <П, МП>, <МП, Д>, <СА, Д>}, которое выражает структуру управления (задает иерархию в этой фирме). Это отношение можно изобразить в виде ориентированного графа:

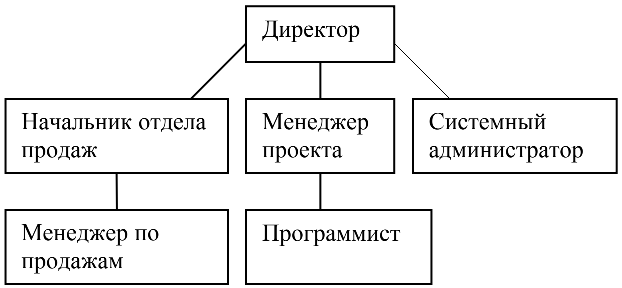


Это отношение является антисимметричным.

В конечном счете, любой работник этой фирмы подчиняется директору. Так что мы можем расширить это отношение, добавив в него пары <МПП, Д> и <П, Д> (дорисовав соответствующие стрелки). Очевидно, что полученное отношение будет транзитивным.

Кроме того, можно сделать это отношение рефлексивным, добавив в него пары <МПП, МПП>, <НОП, НОП>, <П, П>, <МП, МП>, <СА, СА>, <Д, Д> (дорисовав соответствующие петли). Это разумно, ведь можно сказать, что каждый из работников подчиняется сам себе (предполагаем, что все они вменяемы ☺).

В итоге, получим отношение частичного порядка, которое можно было бы изобразить орграфом с кучей стрелок и петель. Однако принято изображать такие отношения с помощью диаграммы Хассе. Для этого отношения она такова:



Это уже неориентированный граф, в нем исходные стрелки заменены на линии, петли не нарисованы, стрелки, добавленные по транзитивности, – тоже, но при этом неявно предполагается, что они есть.

Особенностью диаграмм Хассе является то, что в них имеет существенное значение высота, на которой расположен элемент: из двух соединенных линией элементов один обязательно располагается ниже другого – это значит, что он «меньше» («хуже», «подчиняется» и т.п., в зависимости от содержательного смысла отношения).

Пусть на множестве A задано “≤” - отношение частичного порядка. Вводятся следующие определения.

Элемент $m \in A$ называется *минимальным*, если в A нет элементов $x \neq m$ таких, что $x \leq m$.

Элемент $m \in A$ называется *максимальным*, если в A нет элементов $x \neq m$ таких, что $m \leq x$.

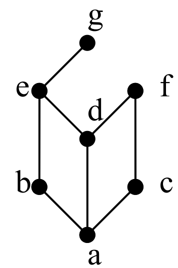
Элемент $m \in A$ называется *наименьшим*, если $m \leq x\ \forall x \in A$.

Элемент $m \in A$ называется *наибольшим*, если $x \leq m\ \forall x \in A$.

Если в частично упорядоченном множестве A все элементы сравнимы, т.е. $\forall x \neq y \in A$ одна из двух пар <x, y> или <y, x> обязательно принадлежит отношению порядка, то это отношение называется *линейным порядком*.

Пример 18. В частично упорядоченном множестве работников фирмы из примера 17 минимальных элементов будет несколько – это МПП, П и СА; Д является максимальным и наибольшим; наименьшего элемента нет.

Пример 19. Пусть на множестве A = {a, b, c, d, e, f, g} задано отношение частичного порядка с помощью диаграммы Хассе.



Выпишем содержащиеся в нем пары.

Это отношение будет содержать, исходя из рефлексивности, пары: <a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <e, e>, <f, f>, <g, g>.

Далее, для каждой линии на диаграмме запишем соответствующую ей пару, учитывая высоту, на которой расположены соединенные этой линией элементы: <a, b>, <a, d>, <a, c>, <b, e>, <c, f>, <d, e>, <d, f>, <e, g>.

Кроме того, по транзитивности, добавим пары: <a, e>, <a, f>, <b, g>, <d, g>.

Ну и, с учетом уже добавленных, добавляем также, по транзитивности, пару <a, g>.

Итак, заданное отношение имеет вид: “≤” = {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <e, e>, <f, f>, <g, g>, <a, b>, <a, d>, <a, c>, <b, e>, <c, f>, <d, e>, <d, f>, <e, g>, <a, e>, <a, f>, <b, g>, <d, g>, <a, g>}.

a – минимальный и наименьший элемент множества А, наибольшего нет, g и f – максимальные.

“≤” не является отношением линейного порядка, так как несравнимы элементы b и c, e и f, g и f, b и f, c и e, c и g, b и d, c и d.

Можно дополнить это отношение до линейного порядка, упорядочив произвольным образом эти элементы, не нарушая при этом транзитивность.

Например, добавим в это отношение пары <b, c>, <f, e>, <c,d>.

По транзитивности, в него войдут также пары <b, d>, <b, f>, <c, e>, <c, g>, <f, g>.

Таким образом, получим отношение линейного порядка {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <e, e>, <f, f>, <g, g>, <a, b>, <a, d>, <a, c>, <b, e>, <c, f>, <d, e>, <d, f>, <e, g>, <a, e>, <a, f>, <b, g>, <d, g>, <a, g>, <b, c>, <f, e>, <c,d>, <b, d>, <b, f>, <c, e>, <c, g>, <f, g>}.

Диаграмма Хассе этого отношения будет иметь вид: