ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ С ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Сологуб Г.Б.
Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Пантелеев А.В.
Московский авиационный институт

В практике программирования возникает задача сформировать матрицу с псевдослучайными элементами, имеющую заданные характеристики. В общедоступной литературе по линейной алгебре и программированию [1, 2] такие алгоритмы специально не рассматриваются, однако содержатся все теоретические сведения, необходимые для их создания.

В процессе создания лабораторного практикума по линейной алгебре с системой тестирования знаний были разработаны алгоритмы и написаны соответствующие подпрограммы, предназначенные для генерации некоторых типов таких матриц, а именно целочисленных матриц, которые:

а) имеют заданный ранг;

б) являются матрицами совместных и несовместных неоднородных систем линейных алгебраических уравнений с заданным количеством уравнений, неизвестных и столбцов фундаментальной системы решений;

в) имеют определитель, по модулю равный единице;

г) имеют заданные собственные значения и собственные векторы;

д) являются матрицами положительно и отрицательно определенных квадратичных форм с заданным дискриминантом, рангом и сигнатурой.

Одной из задач тестируемого является определение соответствующих характеристик этих матриц. Поэтому на них накладываются следующие дополнительные условия: элементы матриц должны быть целыми числами, небольшими по абсолютной величине, а внешний вид матриц не должен прямо свидетельствовать об искомых их характеристиках.

Для получения матрицы вида а) сначала генерируется случайная верхняя треугольная матрица заданного размера с числом ненулевых строк, равным заданному рангу. Затем осуществляется набор элементарных преобразований, не изменяющих ранг матрицы (перестановки строк, прибавление к строке матрицы другой строки этой матрицы, умноженной на случайный коэффициент, и такие же операции со столбцами этой матрицы), с целью заполнения большинства элементов матрицы ненулевыми значениями.

Матрицы вида б) получаются аналогично, за исключением того, что элементарные преобразования осуществляются только над строками, а условие несовместности системы уравнений выполняется за счет добавления одного ненулевого элемента в нулевую строку исходной матрицы треугольного вида.

При создании матриц вида в), г) и д) часть элементов генерируется случайным образом, а остальные вычисляются по разработанным, исходя из методов нахождения соответствующих характеристик матрицы, формулам.

Так, было обнаружено и доказано, что $\forall a \in R$ и $n \in Z^+$ матрицы вида

$$\underset{(n+1)\times(n+1)}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & a+1 & \cdots & a+n \\ a+1 & a+2 & \cdots & a+n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n & a+n+1 & \cdots & a+2n \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \underset{2\times(n-1)}{\mathbf{0}} \\ 0 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\underset{(n-1)\times 2}{\mathbf{0}}} & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\mathbf{E}} \end{array}\right)$$

имеют определитель, равный –1. Это свойство используется при генерации матриц вида в), причем в качестве *a* берется случайное целое число.

Для получения случайных чисел могут применяться библиотечные функции используемого языка программирования.

Конкретная реализация алгоритмов была выполнена на интерпретируемом языке JavaScript сценариев web-страниц, просмотр которых осуществляется в стандартном обозревателе Microsoft Internet Explorer 6.

Литература

1. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
2. Ахо, Альфред В., Хопкрофт, Джон, Ульман, Джеффри, Д. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2000.